

ATTI

DELLA

SOCIETÀ DEI NATURALISTI

E MATEMATICI

DI MODENA

Vol. LXXVI

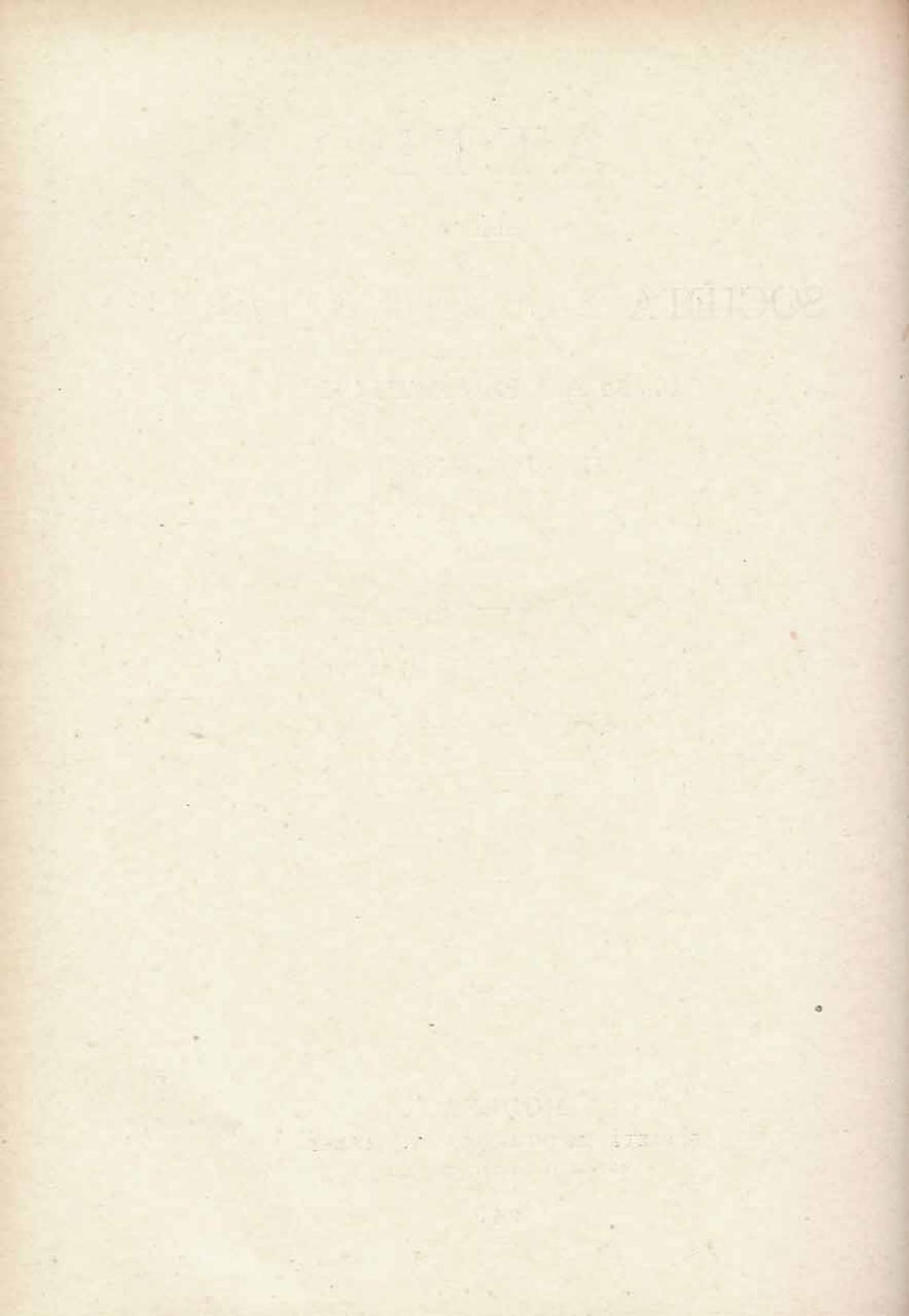
(XXIII della Serie VI)

MODENA

SOCIETÀ TIPOGRAFICA MODENESE

ANTICA TIPOGRAFIA SOLIANI

1945



CONSIGLIO DI PRESIDENZA

PER IL BIENNIO 1945-1946

<i>Presidente</i>	NEGODI prof. GIORGIO
<i>Vicepresidenti</i>	GALLITELLI prof. PAOLO PIERUCCI prof. MARIANO
<i>Segretario</i>	PASQUINI dott. DIEGO
<i>Cassiere</i>	AGGAZZOTTI prof. ALBERTO
<i>Archivista</i>	CHIOSSI dott. ELSA

COMITATO DI REDAZIONE DEGLI « ATTI »

IL PRESIDENTE

I VICE-PRESIDENTI

AGOSTINELLI prof. CATALDO

BERLINGOZZI prof. SERGIO

MONTANARO GALLITELLI prof. EUGENIA

RODOLICO prof. FRANCESCO

SOCI ORDINARI

1945

Acanfora prof. Giuseppe	De Salis Rodolfo
Accardi prof. Vincenzo	Di Noia dott.ssa Raffaellina
Aggazzotti prof. Alberto	Draghetti prof. Alfonso
Agostinelli prof. Cataldo	Favaro prof. Giuseppe
Anelli prof. Mario	Favilli prof. Giovanni
Baccarani dott.ssa Maria	Ferrari Moreni dott. Giovanni
Baccarani-Pignedoli dott.ssa Valeria	Fontana dott. Ermete
Balli prof. Antonio	Forghieri dott. Luigi
Balli prof. Ruggero	Frascaroli dott.ssa Maria
Barbanti Silva prof. Luigi	Galli prof. Giuseppe
Berlingozzi prof. Sergio	Gallitelli prof. Paolo
Bertolani dott. Mario	Garilli prof. Domenico
Bianchi prof. Guido	Giordani-Soika dott. Antonio
Bignardi prof. Carlo	Giovanardi dott.ssa Laura
Bonacini dott. Cesare	Goldoni dott. Gino
Bonacini dott.ssa Mafalda	Gorrieri dott.ssa Laura
Brighenti Giulio	Gualazzini prof. Ugo
Bruzzi dott. Pietro	Guareschi prof. Celso
Bulgarelli dott. Angelo	Levi prof.ssa Angelina
Candeli dott.ssa Adele	Ligabue dott. Livio
Carruccio prof. Ettore	Magiera ing. Ubaldo
Cattaneo prof. Antonio	Malavolti dott. Fernando
Chiossi dott.ssa Elsa	Malvezzi ing. Francesco
Ciferri prof. Raffaele	Manicardi prof. Cesare
Cimini dott.ssa Bruna	Mansuelli dott. Achille
Cobau prof. Roberto	Marchetti-Bertolani dott.ssa Daria
Coppini dott. Dino	Mayr prof.ssa Giovanna
Corni dott. Guido	Marchiò dott.ssa Rosanna
Costa dott.ssa Angelina	Mengoli prof. Vittorio
Crema prof. Carlo	Molinari dott. Ugo
Cuoghi-Costantini prof. Luigia	Montanari dott.ssa Laura
Dallari avv. Luigi	Montanaro-Gallitelli prof. Eugenia
Dalla Volta prof. Alessandro	Montessori dott. Pio
Dechigi prof. Melchiorre	Moscardini Carlo
De Gaetani prof. Giovannino	Munerati prof. Ottavio
Della Casa dott. Aldo	Murer prof. Antonio
Della Valle ing. Luigi	Musaio prof. Francesco

Muzzioli prof. Leopoldo
Nardini dott. Giacomo
Negodi prof. Giorgio
Pagliani dott. Nino
Pantanelli prof. Enrico
Parisi prof. Ottavio
Pasquini dott. Diego
Piccagliani dott. Carlo
Pierucci prof. Mariano
Pignedoli dott. Antonio
Ponzoni dott. Luigi
Prati dott.ssa Anna
Ravenna prof. Ettore
Righi dott.ssa Luciana
Rizzatti prof. Ennio
Rodolico prof. Francesco
Roncaglia prof. Gino
Ruini dott. Carlo
Sandonnini prof. Carlo
Santoro prof.ssa Antonietta
Serra prof. Giovanni
Spada prof. Alberto
Spadoni dott. Felice
Stievano dott.ssa Elisa
Tardini ing. dott. Lorenzo
Teggia dott.ssa Paola
Tirelli prof. Mario
Tognoli dott.ssa Umbertina
Tonelli prof. Leonida
Toni prof. Guido
Trabucchi prof. Emilio
Trenti dott. Federico
Trombara dott. Carlo

Turco dott. Enrico
Vaccari prof. Luigi
Vallisnieri prof. Ercole
Vandelli dott. Italo
Vendramini prof. Renzo
Vergalli dott.ssa Maria
Veronesi dott.ssa Bice
Zamboni prof. Petronio
Zampighi ing. Antonio
Zannini prof. Prospero
Zoboli dott. Luigi

Istituto di Botanica della R. Università di Modena
Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Modena
Istituto di Chimica generale della R. Università di Modena
Istituto di Fisica della R. Università di Modena
Istituto di Geologia della R. Università di Modena
Istituto di Matematica della R. Università di Modena
Istituto di Mineralogia della R. Università di Modena
Istituto di Zoologia della R. Università di Modena
Istituto Tecnico « Jacopo Barozzi » di Modena
Liceo scientifico di Modena
Liceo S. Carlo di Modena

PROCESSI VERBALI

DELLE ADUNANZE

Anno 1945

Adunanza del 14 giugno 1945

Presidente: prof. Giorgio Negodi.

Sono presenti i soci: prof. A. Balli, prof. L. Barbanti, - Silva, dott. M. Bertolani, dott.ssa E. Chiossi, dott.ssa B. Cimini, dott. A. Della Casa, dott.ssa M. P. Frascaroli, dott.ssa L. Giovanardi, dott. G. Goldoni, dott. F. Malavolti, prof. A. Murer, dott. D. Pasquini, dott. A. Pignedoli, prof. G. Serra, dott.ssa M. Vergalli.

Il Presidente ricorda la difficile situazione determinatasi in seguito allo stato di guerra nel primo semestre del corrente anno, che sconsigliò lo svolgimento delle sedute e l'inizio della stampa degli «Atti» sociali. Auspica che nel nuovo periodo che si apre con la fine del conflitto, anche la Società dei Naturalisti e Matematici possa riprendere una attività piena e fiorente.

Commemora in seguito i soci scomparsi recentemente: l'ing. Antonio Rizzi, il dott. marchese Luigi De Buoi ed il socio più anziano della Società e Vicepresidente della stessa prof. Tito Bentivoglio.

A compiere una più ampia rievocazione della vita scientifica del prof. T. Bentivoglio e del dott. L. De Buoi vengono incaricati riaspettivamente il dott. Mario Bertolani ed il dott. Fernando Malavolti.

Su proposta del Presidente vengono riammessi a soci, a voti unanimi, il prof. Ettore Ravenna e la prof. Angelina Levi.

Essendosi reso vacante, con la scomparsa del prof. Bentivoglio la carica di Vicepresidente, l'assemblea nomina a voti unanimi a Vicepresidente della Società per il biennio 1945 - 1946, il prof. Alberto Dainelli.

Il Presidente comunica che, in seguito a sua domanda, il Consiglio di Amministrazione della R. Università ha concesso per quest'anno un sussidio di L. 5000. per il quale rinnova a nome della Società i ringraziamenti al Presidente del Consiglio, Magnifico Rettore prof. C. G. Mer.

Con le consuete norme di statuto vengono nominati, a voti unanimi, i seguenti nuovi soci:

dott.ssa Maria Frascaroli (proposta dal dott. Pignedoli e dal dott. Gondoni); dott.ssa Maria Vergalli (proposta dal dott. Pignedoli e dal dott. Gondoni); Moscardini Carlo (proposto dal prof. Balli e dal dott. Bertolani); Istituto di Matematica della R. Università di Modena (proposto dal prof. M. Pierucci e dal dott. A. Pignedoli).

Per l'assenza del Tesoriere prof. A. Agazzotti la presentazione dei bilanci, consuntivo 1944 e preventivo 1945, viene rimandata ad una prossima seduta.

Vengono in seguito fatte le seguenti comunicazioni scientifiche:

NEGODI G., Il componente mediterraneo nella flora modenese e reggiana. Id. Anomalie alari nella *Saturnia pyri* Schiff.

PIERUCCI M., Una correzione relativistica della legge di Newton e la legge gravitazionale di Armellini (presentata dal Presidente in assenza dell'A.). Id. Donde vengono le comete? (Id.).

AGOSTINELLI C., Sull'area delle orbite cometarie (Id.).

BERTOLANI M., Contributo alla conoscenza della formazione ofolitica appenninica: I graniti erratici dell'Appennino modenese.

BALLI A. e MOSCARDINI C., I lepidotteri del Modenese: Primi contributi alla loro conoscenza sistematico-biologica.

MOSCARDINI C., Primo contributo alla conoscenza sistematica del coleotteri (Cerambycidae, Chrysomelidae, Laridae) del Montenegro.

Id. Contributo alla conoscenza sistematica dei coleotteri (Cerambycidae, Chrysomelidae, Laridae) di Zara

MALAVOLTI F., Resti di Castoro nelle stazioni eneolitiche ed enee di Modena. Id. Sul preteso rinvenimento di *Megaceros euryceros* Aldrovandi ad Arceto di Scandiano.

Id. Materiali paleontologici emiliani inediti o mal noti. Nota IV: Accetta cuprea eneolitica di Campeggine (Reggio E.).

Id. Nuova stazione dell'età del bronzo a Fiorano Modenese.

PASQUINI D., Florula di Montegibbio e Pescaro.

Id. Rilievi sulla vegetazione dei calanchi della zona del Rio Pescaro.

PIGNEDOLI A., Sul moto di un corpo rigido pesante intorno ad un punto fisso, prossimo al baricentro e poco differente dalla struttura giroscopica

Adunanza del 14 agosto 1945

Presidente: prof. Giorgio Negodi.

Sono presenti i soci: dott. M. Bertolani, dott.ssa D. Marchetti-Bertolani, dott.ssa M. Bonacini, dott.ssa A. Candeli, prof. A. Cattaneo, dott. A. Della Casa, prof. A. Draghetti, prof. P. Gallitelli, dott.ssa L. Giovanardi, dott. A. Pignedoli, prof.ssa A. Santoro, prof. L. Vaccari.

È pure presente la dott.ssa Masinelli. Scusa l'essenza la prof.ssa Montanaro - Gallitelli.

Il Presidente comunica le dimissioni dei soci: dott.ssa E. Schiassi, dott.ssa M. Bortolotti-Carruccio, prof. A. Dainelli, che vengono accettate. Date le dimissioni del prof. A. Dainelli avvenute per ragioni di salute e di età ed essendosi così reso vacante una carica di Vicepresidente, l'assemblea nomina a voti unanimi Vicepresidente della Società per il corrente biennio 1945-46 il prof. Paolo Gallitelli.

In conseguenza dei nuovi prezzi, notevolmente aumentati, imposti dalla tipografia stampatrice degli «Atti» sociali, viene fissato, che il numero delle pagine da concedersi gratuite agli Autori, per il volume di quest'anno, sia portato a cinque.

Vengono in seguito fatte le seguenti comunicazioni scientifiche:

PIERUCCI M., L'eclisse parziale di sole del 9 luglio 1945 ed una esperienza di ionizzazione atmosferica (presentata dal Presidente in assenza dell'A.).

PIERUCCI M. e CREMASCHI., Inibizione spettroscopica anormale (pres. dal dott. Pignedoli in assenza dell'A.).

GOLDONI G., Su una classificazione delle omografie (pres. dal dott. Pignedoli in assenza dell'A.).

BERTOLANI M., Tito Bentivoglio (Commemorazione).

Adunanza del 7 dicembre 1945

Presidente: prof. Giorgio Negodi.

Sono presenti i soci: prof. A. Aggazzotti, prof. A. Balli, prof. L. Barbanti-Silva, dott. M. Bertolani, prof. A. Carruccio, prof. G. Galli, prof.ssa A. Levi, dott. F. Malavolti, prof.ssa E. Montanaro - Gallitelli, prof. F. MUSAIO, dott. D. Pasquini, dott. A. Pignedoli, prof. M. Pierucci, prof. F. Rodolico, prof.ssa A. Santoro, prof. G. Serra. È pure presente il sig. M. Canarini, e la dott.ssa M. Bortolotti-Carruccio.

Il Presidente commemora il socio prof. Carlo Menozzi deceduto il 4 marzo 1943. Del Menozzi, modenese di nascita (era nato a Spilamberto di Modena il 7 aprile 1892) ricorda l'attività svolta nel campo scientifico e pratico nelle sue residenze di Padova, Genova, Portici, Chiavari e da ultimo Ferrara, dove ricopriva la carica di entomologo presso il Consorzio Nazionale Produttori di Zucchero, ed i notevoli contributi, raccolti in circa 64 lavori originali, portati alla conoscenza degli insetti e particolarmente delle Formiche e Dermatteri sui quali era uno specialista.

Il Presidente comunica in seguito le dimissioni della dott.ssa Idea Anderlini, richieste per cambiamento di residenza, che vengono accettate.

Con le consuete norme di statuto vengono nominati a voti unanimi i seguenti nuovi soci:

Prof. Francesco MUSAIO (proposto dai proff. G. Negodi e M. Pierucci), prof. Leonida Tonelli (proposto dai proff. G. Negodi e M. Pierucci); dott.ssa Luciana Righi (proposta dal prof. L. Barbanti-Silva e dott. Pignedoli);

dott. Pietro Bruzzi (proposto dai proff. L. Barbanti-Silva e Garilli); dott. Cesare Bonacini (proposto dai proff. M. Pierucci e L. Barbanti-Silva).

Il Presidente comunica che in seguito a sua richiesta il Ministero della Pubblica Istruzione ha concesso per quest'anno un sussidio straordinario di L. 10000, ed informa l'assemblea sulla situazione finanziaria della Società. L'assemblea si associa al prof. Pierucci nell'esprimere al Presidente la soddisfazione della Società per l'interessamento da esso dato allo scopo di promuoverne lo sviluppo, ad onta dell'attuale difficile momento.

Il Tesoriere prof. Aggazzotti presenta ed illustra in seguito i bilanci consuntivo 1944 e preventivo 1945 ed il bilancio consuntivo dell'anno 1945. Si riserva di presentare il bilancio preventivo del 1946 appena sarà in possesso dei dati sulle spese e sugli introiti, che allo stato attuale per l'oscillazione dei prezzi, non sono sicuramente prevedibili.

I bilanci vengono approvati, previo esame da parte dei Revisori dei conti, nominati nei soci prof. L. Barbanti-Silva e dott. M. Bertolani.

Il Presidente comunica inoltre l'ulteriore aumento del 35% delle spese di stampa degli Atti sociali a partire dai primi di dicembre.

Vengono in seguito fatte le seguenti comunicazioni scientifiche:

MAYR G., Le dimensioni delle grandezze elettriche e magnetiche nei vari sistemi (presentata dal Presidente in assenza dell'A.).

MALAVOLTI F., Commemorazione del dott. L. De Buoi.

CHIOSSI E., Sul senso dell'orientamento in *Apis mellifica* var. *ligustica* (presentata dal prof. Balli in assenza dell'A.).

BALLI A., Su un particolare caso di deposizione irregolare in una regina di *Apis mellifica* var. *ligustica*.

ID. Sulla fecondità delle regine di *Apis mellifica* var. *ligustica*.

PIERUCCI M., Il principio di Heisenberg come principio di atomicità cronotopica.

PIGNEDOLI A., Moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico e in prossimità di uno dei poli essendo l'altro polo molto lontano.

Il componente mediterraneo nella flora modenese e reggiana

La complessità del problema della ripartizione della flora di un territorio in distretti floristici naturali, che sieno cioè rispondenti alle vicende di genesi della flora, sì intimamente legate alle passate ed attuali vicende climatiche ed a quelle della genesi e distribuzione geografica delle terre nei tempi geologici ed attuali, è tale che spesso discordanti e fondate su criteri personali, sieno le proposte fatte dai vari Autori, anche nella delimitazione di territori non ampli.

Il problema, che qui viene esaminato, cercando di fornire un nuovo criterio analitico atto a riprenderlo in esame su di una nuova base ed applicandolo alla flora modenese e reggiana, è relativo alla ripartizione dei distretti floristici nella flora italiana.

Per vero, considerando tutto il complesso delle specie di un territorio e le molteplici vicende a cui il popolamento vegetale andò incontro nel corso del tempo, una delimitazione dei distretti floristici in linee definite risulta pur sempre statica ed inadeguata e potrà essere tenuta presente solo nel suo valore di approssimato orientamento più che essere di valore assoluto, ed il criterio di *indice floristico* che qui viene introdotto per la sua valutazione, conferma pienamente questa asserzione.

Nella ricerca dei criteri di valutazione nella ripartizione dei distretti floristici d'Italia, è anzitutto da considerare la posizione generale di questa nel bacino mediterraneo e la sua partecipazione alla flora del grande distretto floristico mediterraneo.

Pur essendo l'Italia nelle grandi linee, estesa nel bacino mediterraneo, data anche la sua configurazione geografica, la sua flora non risponde che in parte, per i suoi componenti e per la composizione nei singoli settori, alla flora tipicamente mediterranea ed anzi in essa vi è una partecipazione più o meno ampia a seconda dei settori, di elementi che nelle grandi linee si possono raggrup-

pare nel componente medio-europeo. Per cui si affaccia anzitutto il problema della distribuzione della flora mediterranea e quella degli altri componenti nei vari settori geografici della penisola e delle isole.

Anche su questo punto i criteri finora proposti sono discordi.

Limitandoci a considerare alcuni soltanto dei più importanti, per ENGLER-GILG il distretto fitogeografico mediterraneo in Italia oltre a comprendere le grandi isole mediterranee di Corsica, Sardegna, Sicilia, Capri ed isolette vicine, la zona costiera dalmata ed istriana, il litorale veneto, entra profondamente in quasi tutta la padana; a guisa di margine segue tutta la costa del versante adriatico e per ampio tratto tutta la costa tirrenica della Penisola. Pienamente dominate dal distretto mediterraneo sarebbero la Basilicata, la Calabria, la Puglia etc. e cioè tutta la parte meridionale di essa. Non appartenenti al distretto mediterraneo secondo questi AA. sarebbero soltanto le Alpi, (a parte la zona pedemontana ed alcuni inclusi alpini) le Alpi Liguri e l'Appennino settentrionale, centrale e parte del meridionale.

Per il FIORI quasi tutta la Penisola, compresa la pianura padana, il lido veneto e friulano, l'Istria costiera, la costa dalmata e tutte le grandi e piccole isole italiane rientrerebbero nel distretto mediterraneo.

Secondo l'ADAMOVIČ (1933) il distretto mediterraneo sarebbe distribuito su tutta la zona costiera dalmata, l'intera Istria, il litorale friulano e veneto con le foci del Po, si spingerebbero a nord a guisa di fascia ai piedi delle Alpi fino alla zona dei laghi ed escludendo quindi gran parte della padana comprenderebbe invece tutta la Penisola situata a sud delle foci del Po e del corso del fiume Reno (escludendo la parte centrale ad occidente dell'Appennino settentrionale); ad occidente di questo comprenderebbe invece il settore ligure. Tutte le grandi e piccole isole del Mediterraneo ed adriatiche rientrerebbero nel distretto mediterraneo e così pure tutto l'Appennino centrale e meridionale e la parte orientale di quello settentrionale. In sostanza a parte delle varianti di estensione del distretto mediterraneo nel settore padano, quello ai piedi delle Alpi, la circoscrizione di questo Autore non sarebbe troppo dissimile da quella del FIORI qualora si escluda il settore padano, dal FIORI incluso nel distretto mediterraneo mentre dall'ADAMOVIČ incluso invece in quello medio-europeo.

L'ADAMOVIČ distingue inoltre nel distretto mediterraneo italiano le seguenti sei zone: 1) circumadriatica, 2) euganeo-insubrica, 3) ligure e delle Alpi marittime, 4) appenninica occidentale, 5) tirrenico-pelagica. 6) corso-sarda.

A parte il fatto che per molti settori meridionali della Penisola, vi possa essere l'accordo tra le circoscrizioni proposte da questi tre Autori, anche ad un esame panoramico del problema esse non sembrano senz'altro accettabili come tali.

Così in quella proposta da ENGLER-GILG che pure ammette una larga partecipazione del componente medio-europeo alla flora di una parte dell'Appennino settentrionale, centrale e meridionale, tanto da far escludere questi settori al tipico distretto mediterraneo, non è accettabile l'iscrizione dell'intera pianura padana al distretto mediterraneo e ciò si accorda pure con quanto ho rilevato sull'assetto dei boschi planiziarî della padana antistante l'Appennino modenese (1941) in relazione a quello dei boschi submontani e montani dello stesso (1941-1942).

Eccessivamente estesa appare, sia per i settori più elevati dell'Appennino settentrionale e centrale, nonchè per tutta la padana, la circoscrizione proposta dal FIORI.

Quella proposta dall'ADAMOVIČ, se sembra « grosso modo » essere più aderente alla realtà di quella del FIORI per la padana, che viene in gran parte esclusa dal distretto mediterraneo, e così pure per un ampio settore dell'Appennino settentrionale, per altri lati sembra inadatta in quanto ad esempio il distretto mediterraneo è tenuto ancora eccezionalmente ampio quando esso lo estende a tutto l'Appennino settentrionale-orientale ed al centrale.

Ciò ci porta a concludere che il problema, per i criteri troppo generali con cui fu affrontato, appare appena sgrossato e che per giungere ad una più profonda conoscenza si richieda una indagine analitica fatta settore per settore della Penisola ed isole, sulle flore locali, applicando un criterio statistico quantitativo oltrechè qualitativo, che permetta di valutare il coefficiente di presenza e densità delle specie considerate come elementi del componente mediterraneo nella flora complessiva e quindi in rapporto alla presenza di elementi propri ad altri componenti di cui quello medio-europeo, inteso in senso largo e collettivo, è il rappresentante opposto. Coefficiente che possa essere espresso in forma di indice della flora dei singoli settori geografici considerati.

Proposta dell'indice di componente.

Per indice di un determinato componente della flora di un settore geografico, nel caso qui esaminato del componente mediterraneo della flora modenese e reggiana, intendo il valore percentuale delle specie appartenenti ad esso componente, sulla flora complessiva del settore geografico considerato.

Il confronto degli indici di un determinato componente per una serie di settori di un territorio geografico, potrà permettere, con maggiore precisione di quanto si è fatto finora, la valutazione quantitativa del componente floristico considerato nella flora complessiva.

Ciò potrà permettere di rivedere il problema della delimitazione dei cosiddetti distretti floristici. La flora di un determinato territorio geografico è generalmente mista e quasi mai è costituita da specie di un solo componente geografico, ma il valore più o meno elevato dell'indice di componente potrà fornire un criterio di distinzione, nel senso che al di sopra di un certo valore di indice per il preponderante afflusso di specie di un componente, si potrà dimostrare anche quantitativamente la prevalenza, in un settore geografico determinato, del componente che caratterizza la flora di esso.

Il criterio quantitativo fornito dall'indice di componente dovrà però essere integrato pure con quello qualitativo in quanto il valore fitogeografico delle specie appartenenti anche allo stesso componente non è identico per tutte, ma alcune posseggono un maggiore significato delle altre.

Il valore quantitativo discriminante dell'indice di componente (in rapporto alla flora locale complessiva), per l'inclusione della flora di un settore geografico nel distretto floristico proprio al suo componente fondamentale, potrà fissarsi soltanto in seguito ad una accurata analisi degli indici di componente della flora di un grande settore geografico.

Così per la flora italiana l'indice di mediterraneità potrà essere valutato sottoponendo all'analisi le varie flore locali di singoli settori, sfruttando l'ingente materiale bibliografico già raccolto nelle innumerevoli flore locali d'Italia, si intende previo riesame analitico delle specie segnalate in esse.

Ed il raffronto degli indici, oltrechè fornire dei dati sulla natura delle singole flore locali, potrà contribuire ad una più severa indagine della distribuzione del componente mediterraneo in tutta la

Penisola ed isole. Altrettanto potrà essere compiuto per gli altri componenti floristici che costituiscono la sua flora.

L'indice del componente mediterraneo nella flora del modenese e reggiano

Quanto sopra esposto viene ora esaminato nella flora del modenese e reggiano, che è stata da me di recente elaborata al completo (NEGODI 1944).

Per la particolare ubicazione del settore geografico su cui questa flora è insediata, l'analisi di essa secondo il criterio degli indici sopra accennato, acquista un particolare significato discriminante, in quanto per il FIORI essa rientrerebbe in pieno nel distretto mediterraneo, per ENGLER-GILG gran parte di essa verrebbe inchiusa nel distretto mediterraneo e solo la parte orograficamente più elevata sarebbe fuori di esso, per l'ADAMOVIČ invece dato che il confine occidentale del distretto mediterraneo nell'Appennino settentrionale sarebbe dato dal corso del fiume Reno, essa verrebbe ad essere completamente fuori del distretto mediterraneo e rientrerebbe in pieno in quello medio-europeo.

L'analisi della flora modenese e reggiana mediante l'indice di componente mediterraneo, dimostra i lati deboli di queste tre tesi.

Gli elenchi sottostanti sono stati redatti inchiudendo nelle diverse categorie le specie del componente mediterraneo così come sono intese nel censimento fatto dall'ADAMOVIČ nell'esame della composizione della flora italiana complessiva (1933). Per vero non sempre l'apprezzamento dei singoli elementi dato da questo A. è del tutto seguibile, pure a scopo di uniformità, mi sono tenuto essenzialmente ad esso.

Gli elementi del componente mediterraneo della flora modenese e reggiana vengono qui sistemati, come per quelli dell'Italia, nei vari gruppi: 1) *eumediterraneo* e cioè elementi che sono distribuiti in tutto il bacino mediterraneo nel senso di RIKLI e che costituiscono perciò gli elementi più decisamente caratteristici per esso; 2) *neomediterranei* e cioè elementi che oltre ad avere la loro massima estensione in determinati settori del bacino mediterraneo (Asia minore fino alla Persia, Africa settentrionale, Canarie, Europa meridionale) si trovano anche nelle parti meridionali dell'Europa media (distretto alpino, bacino del Danubio) specie in scarsa quantità ed in aree limitate, che fanno pensare quivi ad una loro

espansione postglaciale; 3) *nordmediterranei*, distribuiti soltanto in tutta la parte meridionale dell'Europa od in determinati settori di questa; 4) *mediterraneo-orientali* di cui per il modenese e reggiano interessa soltanto il componente *balcanico* e cioè elementi distribuiti in Italia e nei paesi balcanici e spesso in tutto il distretto mediterraneo orientale; 5) *sudmediterranei* e cioè elementi distribuiti oltrechè in determinati settori italiani anche nel Nord-Africa dalle coste africano-atlantiche fino all'Arabia; 6) *mediterraneo-occidentali* distribuiti oltre che nel Nord-Africa anche in determinati settori italiani e nella penisola iberica, nelle isole Baleari e nella Francia meridionale.

Negli elenchi sottostanti sono riportate le specie della flora del componente mediterraneo come sopra intesi. In essi elenchi sono segnate fra parentesi le specie tuttora dubbie per il modenese e reggiano (e che non vennero perciò considerate nel computo complessivo delle specie del gruppo relativo) e con * le specie coltivate od avventizie.

Alcune specie che sono state considerate talora come appartenenti a più di un componente [p. es. *Silene paradoxa* L. in quello neomediterraneo ed in quello balcanico] sono state qui considerate come appartenenti ad un solo componente e precisamente a quello ad esse più rappresentativo.

ELEMENTI EUMEDITERRANEI

Saccharum Ravennae Murr.	(<i>Bromus rubens</i> L. α)
Crypsis schoenoides Lam.	<i>Brachypodium distachyum</i> P.B. α)
(<i>Lagurus ovatus</i> L.)	<i>Psilurus incurvus</i> Schinz. et Thell.
* <i>Arundo Donax</i> L.	<i>Lepturus incurvus</i> Druce
<i>Avena sativa</i> L. subsp. <i>sterilis</i> L. e	<i>Lepturus cylindricus</i> Trin.
subsp. <i>barbata</i> Pott.	<i>Lolium perenne</i> L. subsp. <i>rigidum</i>
<i>Sesleria caerulea</i> Ard. subsp. <i>argentea</i> Savi	Gaud.
<i>Koeleria phleoides</i> Pers. α)	<i>Agropyrum repens</i> L. subsp. <i>glau-</i>
<i>Melica ciliata</i> L. subsp. <i>Magnolii</i>	cum R.S.
Gr. et Godr.	<i>Aegilops ovata</i> L. α)
<i>Briza maxima</i> L.	<i>Carex divisa</i> Huds. subsp. <i>chaetophylla</i> Steud.
<i>Briza minima</i> L.	<i>Arum italicum</i> L.
<i>Vulpia ciliata</i> Lk.	<i>Dracunculus vulgaris</i> Schott
<i>Sclerochloa maritima</i> Sw.	<i>Hyacinthus ramosus</i> L.
<i>Bromus sterilis</i> L. subsp. <i>madritensis</i> L.	* <i>Allium Ampeloprasum</i> L.
	<i>Allium nigrum</i> L. α)

- Asparagus officinalis* L. subsp. *maritimus* L.
Asparagus acutifolius L.
Smilax aspera L. α)
* *Narcissus Jonquilla* L.
Narcissus Tazetta L.
* *Iris florentina* L. α)
* *Iris germanica* L.
Ophrys fusca Lk. α)
Serapias vomeracea Briq. α)
Serapias cordigera L. α)
Orchis provincialis Balb. α)
Celtis australis L.
* *Ficus Carica* L.
Parietaria officinalis L. subsp. *judaica* L.
* *Laurus nobilis* L.
Thesium Linophyllum L. α) *divaricatum* Jan
Aristolochia rotunda L.
Rumex bucephalophorus L.
Camphorosma monspeliaca L. α)
(*Silene muscipula* L.)
Cistus salvifolius L. α)
Reseda alba L. α)
Sisymbrium polyceratium L.
Eruca sativa Mill. α)
Alyssum maritimum Lam.
Fumaria capreolata L. α)
Fumaria officinalis L.
Clematis Viticella L. α)
Clematis Flammula L. α)
Anemone hortensis L. α) *stellata* Lam.
Ranunculus muricatus L.
Nigella damascena L.
Delphinium Ajacis L.
Paeonia officinalis L. subsp. *peregrina* Mill.
Potentilla sterilis Garcke subsp. *micrantha* Ram.
Rosa sempervirens L. α)
Rosa tomentosa Sm. α)
Cotoneaster Pyracantha Spach
Pirus communis L. subsp. *amygdaliformis* Vill.
Spartium junceum L.
Ononis reclinata L. α)
Medicago orbicularis (Bert.) All. α)
Medicago rigidula Desr.
Melilotus sulcata Desf.
(*Melilotus neapolitana* Ten.)
Melilotus italica Lam.
Trifolium glomeratum L.
Trifolium nigrescens Viv.
Trifolium Michelianum Savi
Hymenocarpus circinnatus Savi
Dorycnium rectum Ser.
Dorycnium hirsutum Ser.
(*Lotus creticus* L. subsp. *cytisoides* L.)
Astragalus hamosus L.
Scorpiurus muricata L. subsp. *subvillosa* L.
(*Scorpiurus vermiculata* L.)
Hippocrepis multisiliquosa L.
Securigera Securidaca Deg. et Doerfl.
Onobrychis Caput Galli Lam.
Lathyrus Ochrus DC.
Lathyrus articulatus L. subsp. *Clymenum* L.
Lathyrus annuus L.
Lathyrus Cicer L. α)
Vicia hybrida L. α)
Vicia peregrina L. α)
Vicia bithynica L. α)
Vicia tetrasperma Moench subsp. *tenuissima* Schinz et Thell.
* *Punica Granatum* L.
Bupleurum Odontites L. α) *baldense* Turra
Pimpinella Tragium Vill. α)
Pimpinella peregrina L.
Daucus platycarpus Scop.
Torilis arvensis Lk. subsp. *heterophylla* Guss.
Danae cornubiensis Burn.

- Bifora testiculata* Roth.
Paliurus Spina-Christi Mill.
Linum maritimum L. α)
Linum gallicum L.
Linum strictum L. α)
Althaea hirsuta L.
Malva nicaeensis All.
Hibiscus Trionum L.
Euphorbia Chamaesyce L. α)
Erica arborea L. α)
Cyclamen repandum Sibth
Jasminum fruticans L.
Olea europaea (subsp. *Oleaster*
Hoffm. et Lk.)
* subsp. *sativa* Hoffm. et Lk.
Erythraea spicata Pers.
Echium italicum L. α) *altissimum*
Jacq.
Anchusa azurea Mill.
Borrago officinalis L.
Cynoglossum creticum Mill.
Convolvulus Cantabrica L.
Hyosciamus albus L.
Verbascum sinuatum L.
Linaria commutata Bernh.
Linaria chalepensis Mill.
Anthirrinum majus L. α)
Scrophularia canina L.
Veronica Anagallis-aquatica L.
subsp. *Anagalloides* Guss.
Veronica Cymbalaria Dodard.
Bartsia latifolia S.S.
Orobanche crenata Forsk.
Teucrium Scordium L.
subsp. *scordioides* Schreb.
* *Rosmarinus officinalis* L.
* *Lavandula Spica* L.
Sideritis romana L. α)
* *Salvia officinalis* L.
Melissa officinalis L. α)
- Satureja hortensis* L.
* *Vitex Agnus-Castus* L.
Plantago argentea Chaix.
Plantago maritima L.
subsp. *serpentina* Vill.
Galium murale All. α)
Aperula levigata L.
Lonicera etrusca Santi α)
Centranthus ruber DC.
Cephalaria leucantha Schrad.
Knautia integrifolia Bert. α)
Scabiosa atropurpurea L. subsp. *ma-*
ritima L.
Ecballion Elaterium A. Rich.
(*Specularia hybrida* DC.)
Chrysanthemum segetum L.
Chrysanthemum coronarium L. α)
Anthemis arvensis L. subsp. *ni-*
caeensis W.
Anthemis Cota L.
Helichrysum italicum G. Don
Inula graveolens Desf.
Inula viscosa Ait.
Pulicaria sicula Moris
Asteriscus spinosus Sch. Bip.
Calendula officinalis L. α)
Xanthium italicum Moretti
Carlina lanata L.
Xeranthemum foetidum Moench
Xeranthemum inapertum Mill.
Centaurea alba L. subsp. *deusta* Ten.
Cirsium Acarna Moench
Cynara Cardunculus L.
Scolymus hispanicus L.
Rhagadiolus stellatus Gaertn.
Leontodon crispus Mill.
Helminthia echioides Gaertn.
Tragopogon porrifolius L. α)
Reichardia picroides Roth
Zacyntha verrucosa Gaertn. α)

Le specie appartenenti a questo gruppo sono 175. Trascurando le 7 specie dubbie, 155 specie sono spontanee e 13 coltivate. Le specie spontanee rappresentano il 7 % della flora spontanea complessiva.

ELEMENTI NORD-MEDITERRANEI

^a) specie che si trovano in singole località oppure distribuite in quasi tutta l'Europa meridionale.

^b) specie mediterranee che sono distribuite soltanto nella Francia meridionale ed in alcuni settori dell'Italia.

- | | |
|--|--|
| ^a Stipa Calamagrostis Wahlb. | ^b Scabiosa Columbaria L. |
| ^a Festuca spadicea L. | subsp. Hladnikiana Host |
| ^a Ophrys Bertolonii Moretti α) | ^b Campanula Medium L. |
| ^b Dianthus Cartusianorum L. | ^b Chrysanthemum Leucanthemum L. |
| subsp. Balbisii Ser. | subsp. discoideum All. |
| ^b Cardamine asarifolia L. α) | ^a Inula bifrons L. |
| ^b Sedum monregalense Balbis | ^b Bidens tripartita L. |
| ^a Anthyllis Vulneraria L. | ^b Cirsium eriophorum Scop |
| subsp. tricolor Britt. | subsp. spathulatum Gaud |
| ^b Selinum Carvifolia L. | ^b Leontodon hispidus L. subsp. hyoseroides Koch |
| ^a Peucedanum venetum Koch | ^b Crepis leontodontoides All. |
| ^b Hibiscus roseus Thore α) | ^b Crepis Suffreniana Steud. α) |
| ^b Galium rubrum L. α) | ^b Hieracium amplexicaule L. subsp. pulmonarioides Vill. |
| ^{*b} (Knautia arvensis Coult. subsp. longifolia Coult.) | |

Le specie spontanee di questo gruppo sono 21 di cui 6 al sottogruppo ^a e 15 al sottogruppo ^b. In complesso rappresentano 1 % delle specie spontanee della flora modenese e reggiana.

ELEMENTI NEOMEDITERRANEI

- | | |
|--|---|
| Ceterach officinarum Lam. et DC. | Aira caryophyllaea L. α) |
| Notholaena Maranthae R. Br. | Aira capillaris Host α) |
| Adiantum Capillus-Veneris L. | Avena sativa L. subsp. fatua L. |
| Andropogon Gryllus L. | Gaudinia fragilis P.B. α) |
| Sorghum halepense Pers. | Cynosurus echinatus L. |
| Stipa pennata L. | Sclerochloa dura P.B. |
| Crypsis alopecuroides Schrad. (il tipo) | Bromus squarrosus L. |
| Crypsis aculeata Ait. α) | Lolium perenne L. subsp. multiflorum Lam. |
| Phleum paniculatum Huds. | Agropyrum repens L. subsp. litorale Dun. |
| Alopecurus utriculatus Soland. | Agropyrum junceum P.B. |
| Gastridium ventricosum Schinz et Thell. | Cyperus serotinus Rottb. |
| Agrostis alba L. subsp. verticillata Vill. | Cyperus fuscus L. |
| | Cyperus glaber L. |

- Cyperus longus* L. α)
Scirpus Michelianus L.
Scirpus triquetrus L.
Scirpus mucronatus L.
Fimbrystilis dichotoma Vill.
Carex Halleriana Hasso
Carex extensa Good.
Arum maculatum L. α)
Najas minor All. α)
Juncus obtusiflorus Ehrh.
Juncus Tenageja Ehrh.
Lugula pilosa Willd.
 subsp. *Forsteri* CD.
Tulipa silvestris L. α) *grandiflora* Hy
Lilium bulbiferum L. α)
Lilium Martagon L. α)
Gagea arvensis Dum. α)
Ornithogalum umbellatum L. α) *cam-*
 pestre
Ornithogalum pyramidale L. subsp.
 narbonense L.
Ornithogalum pyrenaicum L. subsp.
 sphaerocarpum Kern.
Scilla autumnalis L.
Muscari racemosum Mill. α)
**Muscari botryoides* Mill. α)
Allium sphaerocephalum L. α)
Allium suaveolens Jacq. subsp. *ochro-*
 leucum Wek.
Asphodelus ramosus L. subsp. *albus*
 Mill.
Paradisica Liliastrum Bert.
Anthericum Liliago L.
Asparagus officinalis L. subsp. *al-*
 tilis L.
Ruscus aculeatus L.
Tamus communis L.
Leucojum aestivum L.
Narcissus poeticus L. α)
Crocus vernus Hill. α) *communis*
 Ker-Gawl
Iris foetidissima L.
Gladiolus segetum Ker-Gawl
Ophrys aranifera Huds. α)
Ophrys apifera Huds. α)
- Ophrys Arachnites* Reich.
Aceras anthropophora L. α)
Loroglossum hircinum Rich.
Orchis tridentata Scop. subsp. *va-*
 riegata All.
Orchis purpurea Huds.
Orchis militaris L.
Orchis Simia Lam.
Orchis pyramidalis L.
Orchis laxiflora Lam. α) *ensifolia*
 Vill
Orchis mascula L. α)
Orchis pallens L.
Spiranthes aestivalis Rich.
Spiranthes spiralis C. Koch.
Limodorum abortivum Sw.
Cephalanthera pallens Rich.
Cephalanthera ensifolia Rich.
Parietaria officinalis L. α) *recta* M. K.
Daphne Laureola L.
Thymelaea Passerina Lge
Thesium Linophyllum L. subsp. *li-*
 nifolium Schrank
 subsp. *bavarum* Schrank
Aristolochia Clematitis L.
Rumex pulcher L. α)
Rumex scutatus L. α)
Chenopodium Botrys L.
Amaranthus hybridus L. subsp. *pa-*
 tulus Bert.
Amaranthus graecizans L. subsp.
 silvester Desf.
Polycarpum tetraphyllum L. α) *ver-*
 ticillatum Fenzl
Cerastium semidecandrum L. subsp.
 ligusticum Viv.
Lychnis coronaria Desr.
Silene italica Pers.
Silene paradoxa L. α)
Silene viridiflora L.
Saponaria ocymoides L.
Tunica saxifraga Scop. α)
Tamarix gallica L.
Helianthemum Fumana Mill.
Helianthemum guttatum Mill. α)

- Reseda luteola* L. α)
Reseda lutea L. α)
Reseda Phytheuma L. α)
Cheiranthus Cheiri L.
Arabis Turrita L.
Sisymbrium Irio L. α)
Sinapis alba L. α)
Brassica nigra Koch
Diplotaxis muralis L.
 subsp. *tenuifolia* DC.
Conringia orientalis Andrz.
Rapistrum rugosum All. α)
Bunias Erucago L. α)
Myagrurn perfoliatum L.
Alyssum montanum L. α)
Alyssum Alyssoides L.
Lunaria annua L.
Vesicaria utriculata DC.
 subsp. *graeca* Reut.
Calepina irregularis Thell.
Lepidium graminifolium L. α)
Corydalis cava Schweigg. et Körte
Papaver hybridum L. subsp. *Argemone* L.
Papaver Rhoeas L. subsp. *dubium* L.
Clematis Vitalba L.
Thalictrum aquilegifolium L.
Ranunculus ophioglossifolius Vill.
Ranunculus Ficaria L. subsp. *grandiflorus* Strobl
Ranunculus montanus Willd. subsp. *Villarsii* DC.
Ranunculus parviflorus L. α)
Nigella arvensis L. α)
Aconitum variegatum L. subsp. *paniculatum* Lam.
Saxifraga granulata L. α)
Sedum dasyphyllum L. α)
Sedum Cepaea L.
Sedum rubens L. α)
Prunus Mahaleb L. α)
Rubus fruticosus L. subsp. *ulmifolius* Schk.
Rubus fruticosus L. subsp. *tomentosus* Borchkh.
- Agrimonia agrimonoides* L.
Poterium Sanguisorba L. subsp. *polygamum* W. K.
Rosa gallica L. subsp. *eristyla* R. Kell.
Rosa micrantha Sm.
Amelanchier ovalis Medic.
Ulex europaeus L. α)
Ononis pusilla L.
Ononis Natrix L.
Medicago arabica Huds.
Medicago hispida Gaertn.
Trifolium striatum L. α)
Trifolium scabrum L. α)
Trifolium incarnatum L. α) *Molineri* Balb.
Trifolium angustifolium L. α)
Trifolium maritimum Huds.
Trifolium ochroleucum Huds. α)
Trifolium pratense L. subsp. *pallidum* W. K.
Trifolium resupinatum L. α)
Trifolium fragiferum L. α)
Trifolium strictum L.
Trifolium hybridum L. subsp. *elegans* Savi
Trifolium badium Schreb.
Anthyllis Vulneraria L. subsp. *Pseudo-Vulneraria* Sag.
Dorycnium pentaphyllum Scop.
 subsp. *herbaceum* Vill.
Lotus angustissimus L. α)
Lotus maritimus L. subsp. *siliquosus* L.
Astragalus depressus L. α)
Astragalus monspessulanus L. α)
Glycyrrhiza glabra L.
Colutea arborescens L.
Coronilla Scorpioides Koch
Coronilla minima L. α)
Coronilla Emerus L.
Hippocrepis comosa L.
* *Pisum sativum* L. subsp. *elatius* Stev.
Lathyrus Nissolia L. α)

- Lathyrus silvester* L. subsp. *latifolius* L.
Lathyrus angulatus L.
Lathyrus sphaericus Retz
Vicia lutea L. α)
Vicia grandiflora Scop. α) *Scopoliana* Koch
Vicia cassubica L. α)
Vicia Cracca L. subsp. *incana* Gouan
Vicia villosa Roth subsp. *dasycarpa* Ten.
Lythrum virgatum L.
Lythrum tribracteatum L. α) *Salzmännii* Jord.
Bupleurum rotundifolium L. α)
Bupleurum rotundifolium L. subsp. *longiflorum* Desv.
Bupleurum tenuissimum L. α)
Bupleurum Gerardi All. α) *patens* Rechb.
Ammi majus L. α) *serratum* Mutel.
Sison Ammomum L.
Seseli Libanotis Koch
Cnidium silaifolium Simonkai
Foeniculum vulgare Hill α) *capilla-ceum* Gilib.
Ferula Ferulago L.
Peucedanum officinale L.
Tordylium maximum L.
Daucus Carota L. subsp. *maximus* Desf.
Daucus grandiflorus Scop.
Scandix Pecten-Veneris L. α)
Bifora radians M. B.
Rhamnus alpina L.
Evonymus latifolius Mill.
Acer monspessulanus L.
Erodium Ciconium L' Hérít.
Erodium moschatum L' Hérít.
Linum usitatissimum L. subsp. *angustifolium* Huds
Linum tenuifolium L. α)
Althaea cannabina L. α)
Abutilon Theophrasti Medic.
Euphorbia Peplus L.
Euphorbia falcata L. subsp. *acuminata* Lam.
Euphorbia exigua L. α) *acuta* L.
Buxus sempervirens L.
Primula acaulis Hill.
Cyclamen neapolitanum Ten.
Ligustrum vulgare L. α)
Fraxinus Ornus L. α)
Cynanchum Vincetoxicum Pers. subsp. *laxum* Bartol.
Chlora perfoliata L. α)
Erythraea pulchella Fr. α)
Cerinthe minor L. α)
Verbascum Thapsus L. α)
Verbascum phlomoides L. α)
Verbascum pulverulentum L. α)
Scrophularia Scopoli Hoppe α)
Veronica acinifolia L.
Veronica triphyllos L.
Teucrium Botrys L.
Melittis Melissophyllum L. α)
Stachys germanica L. α)
Salvia Sclarea L. α)
Satureja grandiflora Scheele
Satureja Calamintha Scheele α) *silvatica* Briq.
Plantago lanceolata L. subsp. *sphaerostachya* M. K. Heg.
Plantago ramosa Asch.
Galium palustre L. subsp. *constrictum* Chaub.
Galium parisiense L. α) *divaricatum* Pourr.
Galium tricorne Stokes
Valerianella ramosa Bast.
Cephalaria transilvanica Schrad. α)
Bryonia dioica Jacq. α)
Jasione montana L. α)
Specularia Speculum-Veneris (Tanf.) Car.
Anthemis tinctoria L. subsp. *Triumfetti* (L.) All.
Micropus erectus L. α)
Filago gallica L. α)

<i>Crupina vulgaris</i> Cass.	<i>Scorzonera laciniata</i> L. α)
<i>Centaurea montana</i> L subsp Trium- fetti All.	<i>Taraxacum officinale</i> Weber subsp. levigatum DC.
<i>Centaurea solstitialis</i> L. α)	<i>Lactuca saligna</i> L. α)
<i>Centaurea calcitrapa</i> L. α)	<i>Crepis vesicaria</i> L. α)
<i>Carthamus lanatus</i> L	<i>Crepis virens</i> L.
<i>Carduus pycnocephalus</i> L. α)	<i>Hieracium amplexicaule</i> L. α)
<i>Silybum Marianum</i> Gaertn.	<i>Hieracium racemosum</i> W.K.
<i>Hypochaeris radicata</i> L. α)	

Le specie spontanee di questo gruppo sono 260 ed 1 specie di esso è coltivata. Le specie spontanee rappresentano 11,8 % della flora spontanea complessiva.

ELEMENTI MEDITERRANEO-OCIDENTALI

<i>Alopecurus bulbosus</i> Gouan	<i>Daucus Carota</i> L. subsp. <i>Gingidium</i> L.
<i>Barbarea dentata</i> Paol.	<i>Laserpitium gallicum</i> L. α)
<i>Brassica monensis</i> Huds.	<i>Stachys Heraclea</i> All. α)
<i>Cytisus sessilifolius</i> L. α)	<i>Asperula levigata</i> L.
<i>Dorycnium pentaphyllum</i> Scop.	<i>Achillea tomentosa</i> L.
subsp. <i>suffruticosum</i> Vill.	<i>Tragopogon porrifolius</i> L. subsp. <i>australis</i> Jord.
<i>Hedysarum coronarium</i> L.	<i>Lagoseris nemausensis</i> Koch
<i>Onobrychis saxatilis</i> Lam.	<i>Crepis vesicaria</i> L. subsp. <i>taraxa-</i> <i>cifolia</i>
<i>Vicia villosa</i> L. subsp. <i>Pseudo-cracca</i> Bert.	<i>Hieracium tomentosum</i> (L.) All.
<i>Petroselinum segetum</i> Koch.	

Le specie spontanee di questo gruppo sono 18, pari a 0,8 % della flora spontanea complessiva. Mancano specie coltivate.

ELEMENTI SUD-MEDITERRANEI

<i>Rosa Seraphini</i> Viv.	* <i>Petasites fragrans</i> Presl
----------------------------	-----------------------------------

Una sola specie spontanea appartiene a questo gruppo, pari a 0,04 % della flora spontanea complessiva. Una specie è coltivata.

ELEMENTI MEDITERRANEO-ORIENTALI

α) Componente balcanico (specie che la penisola balcanica ha in comune con l'Italia)

<i>Sesleria caerulea</i> Ard. subsp. <i>au-</i> <i>tumnalis</i> F.S. Schulz (= <i>S. elon-</i> <i>gata</i> Host)	* <i>Tulipa Oculos-Solis</i> Saint-Amans subsp. <i>praecox</i> Ten.
<i>Carex macrolepis</i> DC.	* <i>Iris florentina</i> L. subsp. <i>pallida</i> Lam.

- Ostrya carpinifolia Scop α)
Quercus Robur L. subsp. lanuginosa Lam.
Quercus Cerris L
* Platanus orientalis L.
Aristolochia longa L. subsp. pallida W.
Silene quadrifida L. α)
Silene Saxifraga L. subsp. petraea Kit. et W.
Silene cretica L. α)
Dianthus Carthusianorum L. subsp. sanguineus Viv.
subsp. liburnicus Bartl.
Dianthus Caryophyllus L. subsp. inodorus L.
Cardamine trifolia L.
Cardamine Plumieri Vill.
Cardamine Chelidonia L.
Fibigia clypeata Medic.
Draba aizoides L. subsp. longirostra Schott
Anemone coronaria L. α) cyanea Risso
Ranunculus velutinus Ten.
Helleborus viridis L. subsp. odorus Wik.
- * Cercis Siliquastrum L.
Genista januensis Viv.
Genista sericea Wulf.
Anthyllis Vulneraria L. subsp. polyphylla DC.
Lathyrus venetus Hall. et Wahlenb.
Eryngium amethystinum L. α)
Linum strictum L. subsp. corymbulosum Rchb. (= L. liburnicus Scop.)
Digitalis ferruginea L.
Melampyrum cristatum L. α)
Scutellaria peregrina L. subsp. Columnae All.
Laminium Orvala L.
Stachys recta L. subsp. labiosa Bert.
Inula spiraeifolia L. (= I. squarrosa L.)
Hieracium racemosum W.K. subsp. Virga-Aurea Cass.
subsp. crinitum S.S.
- b) Specie che l'Italia ha in comune soltanto con il territorio mediterraneo asiatico
- * Mespilus germanica L. α) silvestris Goir.

Le specie del gruppo balcanico α) sono 39 di cui 4 coltivate e 35 spontanee. Queste ultime rappresentano il 1,5 % della flora spontanea complessiva.

Il gruppo b) non possiede specie spontanee ma soltanto una coltivata.

La Flora del modenese e reggiano, secondo il mio prospetto (NEGODI 1944), si compone di 2209 specie spontanee in ciò incluse le sottospecie considerate come unità specifiche, ed escludendo le semplici varietà che non ho qui considerate in quanto subordinate, e gli ibridi.

A queste vanno aggiunte 150 specie tra coltivate [di cui alcune divenute subspontanee] ed alcune avventizie, per cui la flora di queste provincie ammonta a 2350 specie e sottospecie.

Il componente mediterraneo della flora spontanea delle provincie di Modena e Reggio Emilia relativo alle specie e sottospecie spontanee

è dato dal seguente prospetto. In esso oltre al valore assoluto per i singoli sottocomponenti è data pure la percentuale di ognuno di essi e quella complessiva.

	numero delle specie	% sulle 2200 specie spont.
eumediterranei	155	7 %
nordmediterranei	21	1 »
neomediterranei	260	11,8 »
mediterranei occidentali	18	0,8 »
sudmediterranei	1	0,04 »
mediterranei orientali		
a) balcanici	35	1,5 »
	<hr/>	<hr/>
	490	22 %

Per le *specie coltivate ed avventizie* il componente mediterraneo è il seguente:

	numero delle specie	% sulle 150 specie coltivate ed avventizie
eumediterranei	13	8,7 %
nordmediterranei	1	0,6 »
neomediterranei	1	0,6 »
mediterranei occidentali.	—	—
sudmediterranei	1	0,6 »
mediterranei occidentali		
a) balcanici	4	2,7 »
b) italo-asiatici	1	0,6 »
	<hr/>	<hr/>
totale	21	14 %

Su 2350 specie e sottospecie spontanee e coltivate ed avventizie vi sono quindi 511 specie mediterranee tra spontanee e coltivate ed avventizie pari a 21,75 % della flora complessiva, valore poco discosto dal valore percentuale delle specie mediterranee spontanee (22 %) della flora spontanea.

*
* * *

Trascurando in un primo tempo di considerare le specie mediterranee coltivate, e riferendoci soltanto alle specie e sottospecie spontanee, dal prospetto soprastante risulta che su 2200 specie

spontanee della flora complessiva, 490 appartengono al componente mediterraneo, pari al 22 % di essa, contro quindi il 78 % di specie che appartengono alla flora medio-europea intesa in senso largo.

Il contingente delle specie mediterranee espresso da questo valore percentuale, che costituisce così l'*indice di mediterraneità* della flora modenese e reggiana, non è molto elevato e chiarisce che vi è la partecipazione della flora mediterranea in essa ma questa è limitata in confronto a quella degli altri componenti dati dalla flora medio-europea.

L'esame dei gruppi del componente mediterraneo dimostra inoltre che le specie non sono egualmente distribuite in essi; e pure l'esame delle specie che costituiscono i singoli gruppi più significativi assieme alle loro caratteristiche distributive dimostra viepiù la non rilevante partecipazione della flora mediterranea alla flora modenese e reggiana.

Gli elementi eumediterranei sono 155 pari a 7 % della flora complessiva, valore decisamente basso per questo gruppo che è il più rappresentativo della flora mediterranea. L'esame analitico delle specie ad esso appartenenti dimostra che in esso gruppo vengono a mancare moltissime delle più tipiche specie mediterranee, e particolarmente quelle della foresta e della macchia che danno il tono essenziale alla flora e vegetazione mediterranea. Tra le specie presenti possiamo rimarcare il *Dracunculus vulgaris* ma assai raro, *Smilax aspera* più frequente, il raro e localizzato nel reggiano *Cistus salvifolius*, il *Cotoneaster pyracantha* pur esso poco diffuso e soprattutto l'*Erica arborea* non molto frequente e localizzata quà e là nel settore collinare.

Poche sono le specie tipiche della macchia e macchia - foresta mediterranea e di importanza secondaria nel passaggio vegetale. Più numerose sono invece le specie erbacee. In complesso il gruppo eumediterraneo non è molto rappresentato e soltanto da specie a ridotta macrotermia, quelle più tipiche sono per lo più di scarsa diffusione o sporadiche. Il gruppo eumediterraneo fa l'impressione di essere in regresso.

Assai scarsamente rappresentati sono i componenti nordmediterraneo (con 21 specie pari a 1 %), mediterraneo-occidentale (con 18 specie pari a 0,8 %) e sudmediterraneo (con 1 specie pari a 0,04 %), i quali dimostrano nel complesso l'oltremodo ridotta partecipazione di questi gruppi mediterranei alla flora modenese e reggiana, lontana e piuttosto appartata dai relativi centri di dispersione di essi.

Leggermente più rappresentato è il componente balcanico (con 35 specie pari a 1,5 %), nel quale vi sono specie di più alto significato fitogeografico quali *Quercus pubescens*, *Quercus Cerris*, *Ostrya carpinifolia*, specie di larga distribuzione nel distretto, nel quale, insediate da lunga data ed ampiamente diffuse, indicano i legami esistenti tra la flora appenninica e quella balcanica risalenti vero similmente sino dal terziario.

Il gruppo neomediterraneo, nella flora modenese e reggiana, assume il predominio sugli altri (con 260 specie pari 11,8 %) con un numero di specie che è circa la metà del componente mediterraneo complessivo. Esso è costituito da specie a carattere mediterraneo più attenuato (e ciò spiega anche la loro diffusione attuale più ampia anche fuori del bacino mediterraneo e verso nord) e cioè da specie che più si prestano ad occupare anche il settore floristico qui esaminato, rarefatto in elementi eumediterranei e più ricco invece di elementi temperati, che si accordano alle condizioni climatiche attuali del settore.

In complesso quindi possiamo concludere che nella flora modenese e reggiana è presente il componente mediterraneo ma in misura limitata e specialmente il gruppo eumediterraneo che è quello che costituisce il gruppo stipite o principale; leggermente più elevato è invece il gruppo neomediterraneo in quanto costituito da specie ad accentuazione mediterranea più limitata. Per entrambi i gruppi ciò sta in relazione soprattutto alle attuali condizioni climatiche del distretto. Gli altri gruppi mediterranei sono rappresentati da specie in numero ancora minore, particolarmente quelli sudmediterranei e nordmediterranei e mediterraneo-occidentali, il chè sta in relazione forse, oltre ai fattori climatici, alla particolare ubicazione del distretto qui considerato in rapporto ai centri di dispersione di questi gruppi di specie. Per il gruppo balcanico seppure il contingente di specie presenti sia basso, non mancano in esso specie a larga diffusione e di primo piano nel paesaggio vegetale del settore.

Esiguo è il numero delle specie del componente mediterraneo che nel modenese e reggiano non sono spontanee bensì coltivate od avventizie. Esse ammontano a 21 sul totale delle 150 specie coltivate ed avventizie, pari al 14 % delle coltivate.

Il numero delle specie coltivate ed avventizie dei singoli gruppi del componente mediterraneo è indicato nel prospetto soprastante.

Esso dimostra che, mentre oltremodo esiguo è il numero di queste specie in quasi tutti i gruppi, un poco superiore è quello per il gruppo eumediterraneo con 13 specie di cui alcune ornamentali e spontaneizzate per essere sfuggite alla coltura come: *Narcissus Jonquilla*, *Iris florentina*, od orticole come *Allium Ampeloprasum*, *Rosmarinus officinalis*, *Lavandula Spica*, *Salvia officinalis*, per lo più resistenti al clima invernale, ed il *Laurus nobilis* pur esso resistente in pien'aria, per quanto durante gli inverni più rigidi esso vada incontro al congelamento più o meno completo di tutto il germoglio epigeo. Una buona resistenza al gelo invernale possiede il *Ficus carica* per quanto spesso subisca delle lesioni durante gli inverni a punte minime molto forti specie nella pianura modenese. L'*Olea europaea* è assai raro nel versante appenninico modenese e reggiano, in scarsi ceppi tanto da essere praticamente privo di valore economico e da considerare inadatto alla coltura. Alcuni gruppi del componente mediterraneo hanno soltanto una od addirittura nessuna specie coltivata presente. Quello balcanico possiede 3 specie coltivate nella flora modenese e reggiana di cui le più importanti sono il *Platanus orientalis*, il *Cercis Siliquastrum*, la cui coltura riesce in pieno nelle condizioni climatiche ambientali e sono largamente utilizzati nei parchi e giardini.

In complesso possiamo dire che le specie coltivate appartenenti al componente mediterraneo sono scarse e quivi resistono quelle che hanno una più larga tolleranza climatica. Da questo punto di vista il comportamento delle specie mediterranee coltivate è simile a quello delle specie spontanee dello stesso componente mediterraneo.

Un adeguato raffronto dell'*indice di mediterraneità* tra il settore floristico modenese e reggiano, qui introdotto per l'esame del suo complesso e dei suoi singoli gruppi, e quello di altri settori della Penisola italiana e sue isole, per ora non si può compiere non essendo noto per altri settori.

Esso sarà possibile quando l'ulteriore indagine su questo problema, che mi riservo di estendere ad altri settori più significativi della penisola, e delle isole, lo renderà noto, e metterà a disposizione della ricerca un efficace mezzo di analisi.

È tuttavia intuibile sino da ora che nel settore meridionale della penisola e nelle grandi e piccole isole mediterranee, l'indice mediterraneo debba essere molto più elevato e più rilevante debba essere soprattutto il gruppo eumediterraneo, gli altri gruppi potranno essere più o meno rappresentati a seconda della ubicazione

del territorio considerato, situato più o meno nella sfera di irradiazione dei centri di espansione dei singoli gruppi; è pure evidente che il gruppo neomediterraneo debba essere sopraffatto progressivamente dal nord verso il mezzogiorno della penisola dal gruppo eumediterraneo.

Un più sicuro criterio di valutazione per stabilire la possibilità di ascrizione di una flora al distretto mediterraneo potrà essere dato dopo un esame critico sul valore quantitativo dell'indice di mediterraneità integrato dall'esame qualitativo delle specie che lo compongono. Tuttavia pure mancando per ora questo mezzo di raffronto, si può sicuramente affermare che il complesso della flora modenese e reggiana per il valore limitato dell'indice mediterraneo complessivo e di quello dei suoi singoli gruppi rappresentativi, non ha i caratteri di una flora mediterranea e non si può perciò includere globalmente in detto distretto.

La flora modenese e reggiana se risente tutt'ora di infiltrazioni mediterranee e costituite per lo più da specie a macrotermia più attenuata, queste per il loro numero e per la scarsa frequenza delle più rappresentative, sono tali da non poter essere considerate come essenziali nella composizione della flora suddetta.

Gli elementi eumediterranei e molti di altri gruppi, legati per lo più a stazioni submontane devono essere considerati come un residuo della flora di un periodo più macrotermico post-glaciale e taluni persino di quello finiterziario, proprio dei settori posti ai margini del mare pliocenico; ed attualmente sono in via di regressione.

Come ho già esaminato nei miei precedenti lavori sulla flora ipsofila appenninica modenese, quivi gli elementi ipsofili hanno carattere eminentemente medio-europeo, ma una larga partecipazione di specie della flora medio-europea vi è pure nella flora montana, submontana e planiziaria del settore modenese e reggiano ed è particolarmente nella zona submontana che in essa si intrecciano gli elementi del componente mediterraneo.

Da quanto precede non può essere accettata la tesi del FIORI che estende il distretto mediterraneo anche a tutto il settore modenese e reggiano e più a nord anche a tutta la padana, così pure poco risponde alle conseguenze della nostra indagine la delimitazione fatta da ENGLER-GILG.

Quanto alla definizione dell'ADAMOVIČ, questo Autore escludendo il distretto mediterraneo dall'Appennino settentrionale ad occidente del fiume Reno e dalla pianura padana fino ad oltre il

Po, escluderebbe di conseguenza pure il settore modenese e reggiano dal distretto mediterraneo, settore che verrebbe invece incluso in quello medio-europeo. Lasciando impregiudicata la tesi dell'ADAMOVIČ per i settori circoscrivibili a quello qui esaminato e limitandoci a questo, possiamo dire che anche il criterio applicato dall'ADAMOVIČ non corrisponde alla realtà delle cose in quanto trascura la presenza, sia pure limitata, di elementi mediterranei nella flora modenese e reggiana.

Ma ciò è dovuto alla applicazione di un metodo inadatto.

In realtà il criterio delle delimitazioni geografiche definite dei distretti floristici finora applicato e quindi anche quello dell'ADAMOVIČ è sempre di un certo arbitrio e l'esame condotto in questo lavoro sulla flora modenese e reggiana dimostra chiaramente che pure essendo scarsamente rappresentata, la flora mediterranea è in essa pur sempre presente e si intreccia nella zona ad essa più favorevole con quella predominante medio-europea.

Il criterio delle delimitazioni è quindi inadatto non essendo basato su di un valore definibile. Il carattere di composizione della flora di un determinato territorio in rapporto a quello degli altri potrà essere ricavato precisando gli indici di componente fitogeografico, che permettono un apprezzamento quantitativo e qualitativo dei vari componenti che partecipano alla sua costituzione, come ho qui rilevato per la flora modenese e reggiana.

Istituto Botanico dell'Università di Modena

23 agosto 1944

BIBLIOGRAFIA

- ADAMOVIČ L. — *Die Pflanzengeographische Stellung und Gliederung Italiens*. Jena Fischer, 1933.
- Id. — *Die Pflanzenwelt der Adrialänder*. Jena Fischer, 1929.
- BALDACCI A. — *Del posto che occupa in geografia botanica la Flora del Bolognese e dell'Emilia*. 1897
- BÉGUINOT A. e GABELLI L. — *La flora albeale del Reno Bolognese*. « Nuovo Giorn. Bot. Ital. », 1915.
- FIORI A. — *Nuova Flora Analitica d'Italia* Firenze, 1925-1929.
- FIORI A., PAOLETTI G. e BÉGUINOT A. — *Flora Analitica d'Italia*. Padova, vol. I-IV, 1896-1908.
- GRISEBACH A. — *Die Vegetation der Erde nach ihrer klimatischen Anordnung* II Aufl., 1872.
- ENGLER A. — *Versuch einer Entwicklungsgeschichte der Pflanzenwelt*. Leipzig, 1879.
- Id. — *Grundzüge der Entwicklung der Flora Europas seit der Tertiärzeit*. « Bericht über die dritte Zusammenkunft der freien Vereinigung der systematischen Botanik und Pflanzengeographie ». Leipzig, 1905.
- ENGLER A. u. GILG E. — *Syllabus der Pflanzenfamilien*. Berlin, 1912, IX u. X Aufl. 1926
- NEGODI G. — *Studi sulla vegetazione dell'Appennino emiliano e della pianura adiacente*. — Mem. I. — *Associazioni a Quercus pubescens, Pinus silvestris ed Erica arborea e loro significato fitogeografico*. « Annali di Botanica », vol. XXII, fasc. 2, 1941.
- Id. — *Id.* — Mem. II. — *La flora e la vegetazione dei serpentini di Varana*. « Annali di Botanica », vol. XXII, fasc. 2, 1941.
- Id. — *Id.* — Mem. III. — *La vegetazione dei boschi pianiziani del modenese*. « Archivio Botanico », vol. XVII (ser. III, vol. 1), fasc. 3-4, 1941.
- Id. — *Id.* — Mem. IV. — *La flora e la vegetazione del M. Cimone*. « Archivio Botanico », vol. XVII (ser. III, vol. 1), fasc. 3-4, 1941.
- Id. — *Id.* — Mem. V. — *La flora e la vegetazione del diabase rosso del Sasso Tignoso modenese (m. 1492)*. « Annali di Botanica », vol. XXII, fasc. 1, 1942.

- NEGODI G. — *Id.* — Mem. VI. — *Caratteri delle associazioni forestali dell'Appennino modenese con particolare riguardo alle più orofile.* « Annali di Botanica », vol. XXIII, fasc. 1, 1942.
- ID. — *Id.* — Mem. VII. — *Aspetti della vegetazione del M. Rondinaio (m. 1964).* « Atti Soc. dei Natur. e Matem. di Modena », vol. LXXIV, 1943.
- ID. — *La distribuzione dell'Erica arborea L. nell'Appennino modenese.* « Atti Soc. dei Natur. e Matem. di Modena », vol. LXXIV, 1943.
- ID. — *La flora fossile di S. Venanzio (Appennino modenese).* « Archivio Botanico », vol. XIX (ser. III, vol. II), pp. 1-35, 1943.
- ID. — *Flora delle provincie di Modena e Reggio Emilia.* « Atti Soc. Natur. e Matem. di Modena », vol. LXXV, pp. 1-66, 1944.
- TROTTER A. — *Gli elementi balcanico-orientali della Flora italiana e l'ipotesi dell'Adriatide.* « Atti R. Istituto d'incoraggiamento Napoli », 1912.
- RIKLI H. — *Lebensbedingungen und Vegetationsverhältnisse der Mittelmeerländer und der atlantischen Insel.* Jena, 1912.

MARIO BERTOLANI

Contributo alla conoscenza della formazione ofiolitica appenninica

Graniti erratici dell'Appennino Modenese

L'intendimento di questa nota è, come quello delle precedenti (1-2), di allargare le cognizioni petrografiche, con dati ottici e chimici, della così discussa formazione ofiolitica, estendendo, in questo caso, le ricerche ad elementi accessori della formazione stessa; mettendo quindi in evidenza eventuali analogie con rocce di altre località.

Il presente studio si riferisce a due esemplari di granito e uno di porfido, erratici, raccolti nel basso Appennino Modenese ed avente rapporti con l'estesa zona di argille scagliose affioranti, come appendice vi è inoltre la descrizione di un ciotolo, pure granitico, trovato nello scavo della stazione preistorica del Pescale e, come tale, di incerta provenienza.

GRANITO DEL PESCALE

Nel 1937 il Professor Gallitelli segnalava e descriveva in una sua nota (3), un gabbro anfibolico della Valle del Pescale, modesto affluente di destra del fiume Secchia, che attraversa per buona parte del suo corso le argille scagliose. Nella stessa zona venivano in seguito rinvenuti elementi di una roccia assai più acida. Uno di questi, un ciotolo di non grandi dimensioni, poco più di un pugno, veniva trovato nel letto del torrente, due chilometri a est del ponte (*), dallo scultore Boccolari, appassionato collezionista di pietre ornamentali, che, per interessamento del dott. Malavolti, me lo cedeva per lo studio (**).

(*) Vedi carta geologica d'Italia al 100000, F. 86, Modena.

(**) Ringrazio il Dott. Malavolti, unitamente al Prof. Boccolari, per il materiale e le indicazioni su di esso fornitemi.

Si tratta di un granito ben conservato di color roseo, con scarsi elementi scuri, a grana piuttosto minuta e tendenza a struttura porfiroide per fenocristalli radi e di non grandi dimensioni di feldispato e di quarzo.

In sezione sottile, il microscopio ha rivelato i seguenti componenti principali: *quarzo*, *ortoclasio*, *plagioclasio*, *mica biotite*, *mica muscovite*, una terza *mica*, che da caratteri ottici e chimici è risultata una probabile *zinnwaldite*, e, come componenti accessori, *granato*, *magnetite*, *ematite*, *zircono*.

Quarzo: è il componente più abbondante; si presenta in cristalli modellati sugli altri, limpidi, con numerose inclusioni solide e le consuete serie di bollicine. L'estinzione è raramente ondulata nei piccoli frammenti: presenta invece il fenomeno della biassicità anomala, con angolo degli assi ottici di circa 6° . Si nota inoltre una spiccata tendenza all'isorientamento, determinata dal fatto che in alcune sezioni pressochè tutti gli esemplari erano tagliati perpendicolarmente all'asse ottico.

Ortoclasio: per la maggior parte è micropertitico con zone anche criptopertitiche. I cristalli sono generalmente grandi con alterazione non molto accentuata di tipo caolinico e sericitico, per la più semplici, benchè non siano rari i geminati secondo Carlsbad e secondo Baveno.

Plagioclasio: quantitativamente non è inferiore all'ortoclasio. Si presenta in cristalli spesso idiomorfi, geminati secondo la legge dell'Albite, Albite-Carlsbad, Albite-Pericelino. L'alterazione, quando esiste, si limita al nucleo ed è di tipo micaceo. Mancano deformazioni meccaniche, mentre frequentissima è la zonatura. Pure frequenti sono le formazioni mirmechitiche. In cristalli non zonati della zona simmetrica ho trovato valori aggrirantisi sui -6° , corrispondenti a una percentuale di anortite del 14% , con massimi di $-2^\circ 53' = 17\%$ di An e minimi di $-10^\circ 9' = 9\%$ di An. Trattandosi di valori compresi della zona di indeterminatezza, ho potuto accertarmi del segno per mezzo del confronto con gl'indici di rifrazione del quarzo.

In geminati Albite-Carlsbad ho trovato:

$$\lambda = 50^\circ \quad 12\% \text{ An}; \quad \lambda = 80^\circ \quad 10\% \text{ An}; \quad \lambda = 70^\circ \quad 16\% \text{ An}$$

Ci troviamo perciò di fronte a un termine di oligoclasio-albite.

Nei plagioclasii zonati, servendomi dei metodi proposti dall'Aloisi (4), ho determinato i seguenti valori:

E = 27°6'
 $\lambda = 42^{\circ}30'$
 - 4°30' = 14% An (esterno)
 - 2°6' = 1% » (centro)

E = 18°6'
 $\lambda = 23^{\circ}$
 - 1°42' = 16% An (esterno)
 0°24' = 19% » (zona int.)
 2°6' = 10,55% » (centro)

E = 25°18'
 $\lambda = 37^{\circ}$
 - 9°18' = 0,5% An (esterno)
 - 5°12' = 11% » (1.^a z. int.)
 - 1°34' = 17,5% » (2.^a »)
 1° = 20% » (3.^a »)
 2°24' = 22% » (centro)

E = 41°36'
 $\lambda = 90^{\circ}$
 - 13°15' = 6% (esterno)
 - 9°30' = 12,5% (zona inter.)
 - 7°36' = 12,5% (centro)

E = 34°38'
 $\lambda = 65^{\circ}$
 - 8° = 1% An (esterno)
 - 4°42' = 13% » (zona inter.)
 - 1°30' = 17% » (centro)

E = - 35°30'
 $\lambda = 65^{\circ}30'$
 - 10°4' = 8% An (esterno)
 - 6°45' = 14,5% » (z. inter.)
 - 3°18' = 17,5% » (centro)

E = 31°30'
 $\lambda = 51^{\circ}30'$
 - 8°15' = 7% An (esterno)
 - 5°6' = 14,5% » (zona intermedia)
 - 1°42' = 18,5% » (centro)

dai quali si può vedere che la parte esterna è generalmente albica e il nucleo di oligoclasio.

Mica biotite: è scarsa e presenta il caratteristico pleocroismo α giallo olivastro, β e γ verde cupo, oppure α giallognolo, β e γ bruno nero. L'angolo degli assi ottici si aggira sui 9°.

La biotite è in qualche punto alterata in *clorite*, con produzione di minerali opachi. La clorite presenta pleocroismo dal verde pallido al verde intenso e, a volte, è apleocroica.

Mica muscovite: oltre che in piccole lamine, derivate dall'alterazione dei plagioclasii, si trova anche, primaria, in lamine irregolari con nette tracce di sfaldatura.

Spesso associata alla muscovite, in lamine e in aggregati di squamette, vi è una mica biassica leggermente pleocroica con α incolore, β e γ rosa bruno pallidissimo; l'angolo di estinzione c : α presenta un valore massimo di 2°4'; il segno della birifrazione è negativo; il colore d'interferenza varia dal verde al rosso di 3.^o ordine; l'angolo degli assi ottici è di 45°-46°. Alcune laminette, isolate

meccanicamente, e portate alla fiamma, hanno dato a questa una debole colorazione rossastra. Dai caratteri sopra esposti credo sia possibile riferire tale mica a *zinnwaldite*. Questo minerale non è nuovo per i graniti ed è stato segnalato anche da Gallitelli per quelli di Baveno (5) e di Montorfano (6).

Il *granato*, poco abbondante, è in granuli trasparenti, incolori, presso le miche e la clorite. In quest'ultimo minerale relativamente abbondante è la *magnetite*, che si presenta in lamine anche abbastanza espanse. L'*ematite* invece è irregolarmente sparsa nella roccia in granuli ed esili laminette. Piuttosto rari i cristallini di *zircone* isolati, inclusi nel quarzo e nella mica bianca, a volte con forti aureole pleocroiche.

L'analisi chimica ha dato i seguenti risultati (*):

SiO ₂	75,36
TiO ₂	tracce
ZrO ₂	—
Al ₂ O ₃	12,58
Fe ₂ O ₃	2,83
FeO	0,84
MnO	tracce (**)
CaO	1,28
MgO	0,15
BaO	—
Na ₂ O	4,50
K ₂ O	2,30
H ₂ O + 110°	0,46
H ₂ O — 110°	0,06
P ₂ O ₅	—
	100,46

da cui si ricava la seguente forma magmatica secondo Niggli (10):

si	al	fm	c	alc	k	mg	c/fm
424,87	41,64	17,32	7,79	33,22	0,24	0,08	0,449

magma engadinitico

420	44	12	6	38	0,50	0,25	0,50
-----	----	----	---	----	------	------	------

(*) Per l'analisi chimica mi sono valso oltre che dei testi del Treadwell (7) e del Wasington (8), del manualetto italiano del Sesia (9).

(**) La determinazione colorimetrica ha dato una percentuale di 0,0013% di MnO.

Innegabile è l'analogia tra la formula del nostro granito e quella proposta dal Niggli come magma engadinitico. Ci troviamo quindi di fronte ad un tipo assai più acido di quello che ebbero occasione di osservare per il granito di Gombio (1).

GRANITO DI GUIGLIA

Si tratta di un grosso ciotolo esistente nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Modena, raccolto dal Professor Gallitelli, che gentilmente me lo ha concesso in studio, a Q. 360 presso Ca' della Vigna, nelle vicinanze di Guiglia (*), tra il caotico disfacimento di materiali inglobati nelle argille scagliose.

Si presenta con tinte scure, violacee, qua e là chiazzato di zone rossee di feldispato, di biancastri granuli di quarzo e di patine verdastre, presumibilmente cloritiche. È percorso da numerosi minuti litoclasi, che se non compromettono eccessivamente la compattezza e la tenacità della roccia, disturbano non poco la costruzione di sezioni sottili.

Guardando al microscopio, la struttura, dove la roccia è poco alterata, è normale granitica, a grana media, con abbondante quarzo, feldispati e scarsi elementi scuri. In altre zone invece una notevole quantità di minerali opachi, rossastri a luce riflessa, ha determinato, inglobando granuli di quarzo e feldispato, una struttura a maglie simile a quella delle rocce serpentinosi in via di alterazione. È presente e diffusa anche una struttura minutamente brecciata, associata sempre a produzione di pigmenti metallici.

Siamo perciò di fronte a un granito milonitico con zone sparse qua e là intatte.

I componenti principali sono: *Quarzo, ortoclasio, microclino, plagioclasio*; i componenti accessori e di alterazione: *biotite, clorite, ematite, magnetite, zircone, apatite, limonite, calcite, ilmenite*.

Quarzo: è abbondante, allotriomorfo, sia in granuli di medie dimensioni sia in frammenti angolosi. Presenta spesso estinzione ondulata. Le inclusioni solide (zircone, apatite) non sono molto numerose: normalmente diffuse quelle aeriformi e liquide. Si osservano inoltre numerose linee irregolari di frattura, a volte ricementate o con quarzo o con materiale vario indeterminabile.

(*) Vedi carta geologica d'Italia F. 87, Bologna.

Ortoclasio: generalmente è di piccole dimensioni e non geminato. L'alterazione è centrale e poco sviluppata. Si nota inoltre qualche struttura micropegmatitica.

Microclino: è in espande lamine equidimensionali con netta struttura a grata. Non è molto abbondante.

Plagioclasio: abbonda, sia in grandi lamine che in frammenti. L'alterazione, per lo più sericitica, è poco sviluppata in alcuni individui, assai avanzata in altri. Le geminazioni predominanti sono quella polisintetica dell'albite e quella albite-perielino, più rari i geminati albite-Carlsbad.

Il confronto con gl'indici di rifrazione del quarzo ha rivelato trattarsi di un termine acido con meno di 15% di Anortite. Tale dato è stato confermato dai valori dell'angolo di estinzione simmetrica da -6° a -14° corrispondenti a una percentuale di anortite rispettivamente di 13,5 e 4%, che ci rivelano essere il plagioclasio un termine acido di oligoclasio-albite, passante ad albite, come nella roccia descritta precedentemente.

Nei plagioclasii zonati, in verità piuttosto rari, ho potuto determinare quanto segue:

$E = -29^\circ 36'$	$E = -35^\circ 30'$
$\lambda = 59^\circ 30'$	$\lambda = 62^\circ 30'$
$-12^\circ 24' = 5\%$ An (esterno)	$-15^\circ 42' = 0,5\%$ An (esterno)
$-8^\circ 54' = 11\%$ » (zona interm.)	$-13^\circ 6' = 4\%$ » (zona interm.)
$-5^\circ 24' = 15,5\%$ » (centro)	$-11^\circ 18' = 9\%$ » (centro)

$E = -32^\circ$
$\lambda = 55^\circ$
$-13^\circ 42' = 0,5\%$ An (esterno)
$-11^\circ 48' = 4\%$ » (centro)

dove si può vedere che l'esterno è sempre costituito di un termine albitico, mentre il nucleo è solitamente di oligoclasio-albite.

Mica biotite: scarseggia ed è sempre in piccoli elementi con pleocroismo α giallo verdognolo, β e γ verde scuro, spesso è alterata in clorite, scarsamente pleocroica, con la solita produzione di minerali opachi.

Tra gli elementi accessori e di alterazione l'ematite è particolarmente abbondante, in lamine e granuli e soprattutto come minerale cementante e di riempimento. Pure come minerale di riempimento di fratture, sia dei singoli cristalli, che della roccia. è assai

comune la *calcite*. La *magnetite* è scarsa, in cristalli a sezione rettangolare e in masserelle nella *clorite*. Sono presenti inoltre qua e là patine limonitiche.

Lo *zirconio* non è molto abbondante, in cristalli equidimensionali, senza aureola pleocroica, inclusi nel quarzo. Così dicasi dell'*apatite* in cristalli aciculari. È presente pure *ilmenite* leucocenizzata, nella *clorite*.

L'analisi chimica, eseguita su frammenti il meno possibile alterati e milonitizzati, ha fornito i seguenti risultati:

SiO ₂	39,25
TiO ₂	0,09
Al ₂ O ₃	12,31
Fe ₂ O ₃	4,21
FeO	0,83
NnO	tracce
CaO	3,28
MgO	0,31
Na ₂ O	4,09
K ₂ O	2,91
H ₂ O + 110°	0,98
H ₂ O - 110°	0,04
P ₂ O ₅	n. d.
CO ₂	1,78
	100,08

Formula magmatica secondo Niggli

si	al	fm	c	alc	k	mg	c/fm
374,21	3941	23,12	5,86	31,59	0,32	0,11	0,253

L'analisi chimica, con la forte percentuale di Fe, Ca e CO₂, conferma quanto è stato osservato per via ottica, la presenza cioè di materiali estranei cementanti (ematite e calcite), che influiscono sui percenti analitici facendo risultare la roccia in esame di un'acidità inferiore alla reale. Per il calcolo della formula magmatica ho detratto la calcite in quantità di 2,26%; è rimasto però sempre eccessivamente alto il valore di Fe₂O₃, parte del quale invece è di indubbia origine secondaria. Ne risulta perciò una formula anomala, che si discosta, per disparità di valori, dai tipi proposti dal Niggli (10).

PORFIDO QUARZIFERO DELLA VALLE GRIZZAGA

Raccolsi campioni di questa roccia, unitamente al dott. Malavolti, che me ne indicò la presenza, nell'agosto 1944. Si tratta di un trovante, arrotondato nella parte superiore, di circa m³ 0,5, adagiato sulla sponda destra del torrente Grizzaga, che scorre al fondo di una valle non eccessivamente ampia, in parte scavata nelle argille scagliose, sfociante nella pianura presso Maranello a ovest della via Giardini. Detto torrente è un piccolo corso d'acqua che, poco oltre la sua unione col T. Tiepido, si getta nel fiume Panaro (*).

Il masso sopra nominato, a detta dei contadini del luogo, venne alla luce nel letto del torrente qualche decina di anni fa in seguito a una piena eccezionale e fu poi trascinato dai contadini stessi sulla sponda, essendo loro intenzione ricavarne un sedile; idea poi abbandonata, probabilmente per la durezza del materiale. Nel letto del torrente, malgrado accurate ricerche, non mi fu possibile trovare altri elementi di rocce eruttive.

La roccia in questione è rosea a struttura minutamente granitica, passante alla pegmatitica, con fenocristalli di quarzo di 0,3 — 1 cm. di diametro ed altri minori di feldispato. Piuttosto scarsi gli elementi scuri. Notevole la somiglianza macroscopica di questa roccia col porfido quarzifero di Cuasso al Monte.

In sezione sottile al microscopio la pasta fondamentale si risolve in una struttura granulare formata da *quarzo*, *ortoclasio*, *plagioclasio*, *mica biotite* e *clorite*. Inoltre, in quantità subordinata, compaiono *mica muscovite*, *granato*, *magnetite*, *ematite*, *limonite*, *ilmeneite* e *zircone*.

Quarzo: è abbondante, sia in fenocristalli grandi, che conservano in parte la forma bipiramidata, che in cristalli minuti componenti la pasta fondamentale. I cristalli grandi mostrano evidente il parziale riassorbimento magmatico e sono otticamente uniassici, a differenza di quelli di seconda consolidazione, che presentano biascità anomala con piccolo angolo assiale ottico. L'estinzione è normale, le inclusioni, sia negli uni che negli altri, numerose, notevoli per dimensioni quelle di mica bianca, abbondanti quelle liquide e gasose in bollicine allineate.

(*) Vedi carta geologica d'Italia al 100.000, F. 86, Modena.

Ortoclasio: alcuni pochi cristalli raggiungono notevoli dimensioni (0.5 cm.) e risultano solitamente micro o criptopertitici; i rimanenti sono di piccole dimensioni, spesso geminati secondo Carlsbad e con frequenti strutture micropegmatitiche. L'alterazione è centrale, assai sviluppata, di tipo caolinico-sericitica

Plagioclasio: è abbondante, quasi sempre idiomorfo, nelle geminazioni: albite, albite-Carlsbad, albite-pericline. Frequenti sono pure le formazioni mirmechitiche. L'alterazione micaceo terrosa del nucleo è spesso molto avanzata.

Le misure dell'angolo di estinzione simmetrica nei cristalli non zonati hanno fornito valori aggirantisi sui $-11-12^\circ$ con massimi di $-16^\circ 6'$ e minimi di $6^\circ 57'$ corrispondenti a percentuali di 8-9%, 2%, 13% di anortite. Siamo anche qui di fronte ad oligoclasio-albite ed albite; dato anche che α del plagioclasio si è sempre rivelato minore di ε del quarzo e γ minore di ω .

Nei cristalli zonati ho ricavato:

$$E = -30^\circ 24'$$

$$\lambda = 50^\circ$$

$$-13^\circ 36' = 0,5\% \text{ An (esterno)}$$

$$-10^\circ 36' = 4\% \text{ » (1.ª zona inter.)}$$

$$-6^\circ 42' = 13\% \text{ » (2.ª » »)}$$

$$-3^\circ = 16,5\% \text{ » (centro)}$$

$$E = -20^\circ 12'$$

$$\lambda = 65^\circ$$

$$-9^\circ 56' = 8\% \text{ An (esterno)}$$

$$-7^\circ 42' = 13\% \text{ » (centro)}$$

$$E = -39^\circ 24'$$

$$\lambda = 85^\circ$$

$$-11^\circ 54' = 8\% \text{ An (esterno)}$$

$$-7^\circ 12' = 15\% \text{ » (zona intermedia)}$$

$$-1^\circ 12' = 20\% \text{ » (centro)}$$

$$E = 41^\circ 42'$$

$$\lambda = -67^\circ$$

$$-10^\circ 12' = 5\% \text{ An (esterno)}$$

$$-6^\circ 54' = 12,5\% \text{ » (centro)}$$

$$E = 37^\circ$$

$$\lambda = 67^\circ$$

$$-11^\circ = 7,5\% \text{ An (esterno)}$$

$$-7^\circ 54' = 13\% \text{ » (centro)}$$

$$E = -34^\circ 18'$$

$$\lambda = 63^\circ$$

$$-13^\circ 18' = 4\% \text{ An (esterno)}$$

$$-9^\circ 48' = 11\% \text{ » (zona intermedia)}$$

$$-6^\circ 48' = 14,5\% \text{ » (centro)}$$

Dai dati sopra riportati i cristalli risultano avere una composizione albitica od oligoclasio-albitica all'esterno, passante ad un oligoclasio-albite, od oligoclasio centrale.

Mica biotite: è scarsa e quasi totalmente alterata in clorite con α giallo verdino, β e γ verde intenso e produzione di minerali opachi a volte circondati da aureola pleocroica.

La *muscovite* primaria non è così abbondante da poterla considerare tra i componenti principali, malgrado la sua presenza sia costante e se ne contino in media 3-4 laminette per sezione. La *magnetite* si trova quasi esclusivamente lungo i bordi e le tracce di sfaldatura della *clorite*; così dicasi dell'*ilmenite*. L'*ematite* è presente qua e là in minuti granuli, così come le patine e granulazioni *limonitiche*. Rari sono gli *zircon*i, inclusi nel quarzo. Il *granato*, presumibilmente almandino, si presenta in forme irregolari, di dimensioni anche notevoli, di colore roseo in sezione sottile, con numerose inclusioni, specialmente di quarzo.

Per quel che riguarda la distribuzione e le qualità dei singoli componenti, sia principali che accessori, forse non è solamente casuale l'analogia col granito del Pescale. In particolare sono caratteristiche comuni l'acidità del plagioclasio, la presenza di mica bianca e di granato e l'assenza di microclino

L'analisi chimica da dato:

SiO ₂	74,08
TiO ₂	0,07
Al ₂ O ₃	13,66
Fe ₂ O ₃	1,33
FeO	0,54
MnO	—
CaO	1,14
MgO	0,23
Na ₂ O	4,99
K ₂ O	3,52
H ₂ O + 110°	0,92
H ₂ O - 110°	0,04
P ₂ O ₅	tracce
	100,52

Formula magmatica secondo Niggli

si	al	fm	e	alc	k	mg	c/fm
384,40	41,74	15,57	6,23	36,45	0,31	0,12	0,400

Secondo la classificazione del Niggli (10), malgrado il basso valore di *si*, anche il porfido quarzifero della Grizzaga può ascrivarsi ad un magma engadinitico, deponendo ciò favorevolmente sulla supposta analogia col granito del Pescale.

CONCLUSIONI

I tre esemplari granitici illustrati nella presente nota si possono, come già accennato, dividere in due distinti tipi: uno caratterizzato dalla presenza di mica bianca primaria, l'altro dalla presenza di microclino. Al primo appartengono il campione del Pescale e il porfido quarzifero della Grizzaga, al secondo il granito di Guiglia. Tutti tre gli esemplari però appartengono a un magma notevolmente acido; in essi una sensibile acidità presenta pure il plagioclasio, che raramente raggiunge nel nucleo termini oligoclastici. Particolare comune a tutti e tre gli esemplari è anche l'abbondanza del plagioclasio, che si rivela pure all'analisi chimica con una percentuale assai maggiore di Na_2O rispetto a K_2O . Altra caratteristica è infine il tenore assai basso di MgO .

Rocce erratiche o carreggiate di questo tipo furono riscontrate sia da Bonatti (11) che da Rodolico (12) e da Ferrari (13) nell'Appennino settentrionale. Nessuna massa granitica appenninica in posto però è avvicicabile, sia petrograficamente che chimicamente, ad alcuno dei campioni presi in esame, trattandosi sempre di termini sensibilmente più basici. Anche i graniti e porfidi dell'Elba (14, 15, 16, 17, 18), e della Sardegna (19) non presentano con essi forti analogie, così pure quelli di Gavorrano (20) e del Campigliese (Rodolico); solamente il granito nel Giglio, studiato da Rossoni (21), si accosta in modo sensibile. Si tratta però di una differenziazione acida, non del tipo normale studiato da Millosevic (22). Il raffronto può essere invece agevolmente effettuato con parecchi graniti della catena Alpina, tra i quali quello di Baveno (5), quello del M. Bianco (23), i graniti e porfidi del Canavese (24) e quelli di Val d'Ega (25). Più basiche invece risultano le masse granitiche del Montorfano (6), di Alzo (26), del Monte Croce e Cima d'Asta (27).

Per meglio osservare queste analogie riporto qui di seguito in un unico specchio le analisi chimiche del porfido quarzifero della Grizzaga [I], del granito del Pescale [II], del granito di Guiglia [IV] e, per confronto, dei graniti Appenninici erratici del Groppo del Vescovo [V] (11) e del Salti del Diavolo [VI] (12), ambedue dell'Appennino Parmense, nonchè dei graniti alpini: roseo di Baveno [VII] (5), grigio-verde di Belmonte [VIII] (24) e dei porfidi

quarzieri di Cuasso al Monte [IX] — analisi Perrier — (28) e della Valle d'Ega [X] (25) (*):

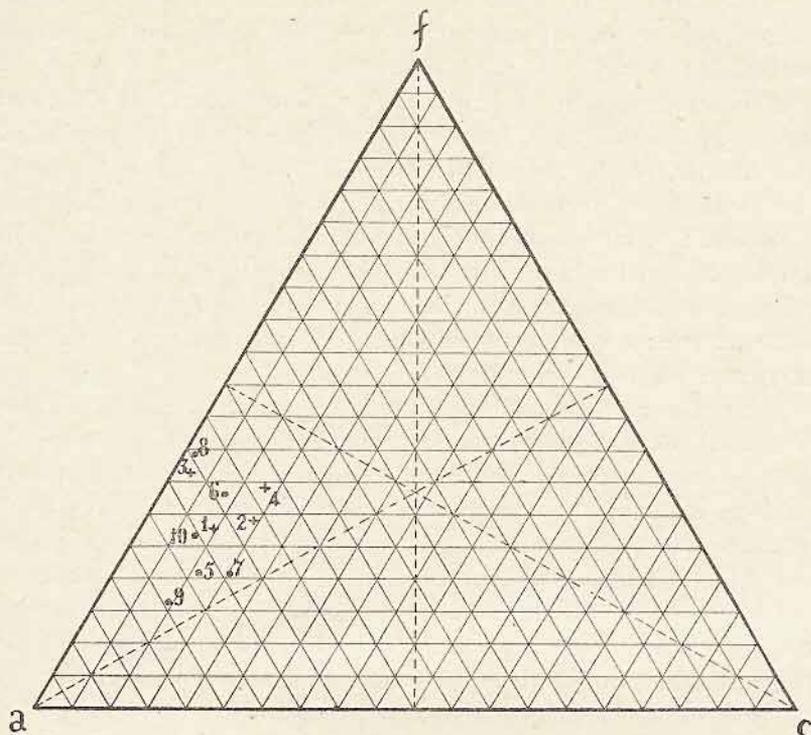
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
SiO ₂	74,08	75,36	74,84	69,25	75,73	77,20	74,70	76,04	76,78	74,04
TiO ₂	0,07	tr.	0,30	0,09	tr.	0,22	0,03	0,56	0,08	—
ZrO ₂	—	—	—	—	—	—	—	0,03	0,01	—
Al ₂ O ₃	13,66	12,53	10,84	12,31	13,08	10,96	13,08	10,51	12,30	13,91
Fe ₂ O ₃	1,83	2,83	1,98	4,21	1,30	2,58	1,53	2,80	1,90	1,28
FeO	0,54	0,84	1,55	0,83	0,27	1,08	0,93	0,45	—	1,08
MnO	—	tr.	tr.	tr.	0,03	tr.	tr.	0,04	0,02	0,02
CaO	1,14	1,28	1,02	1,02	0,30	0,58	0,84	0,19	0,62	0,68
MgO	0,23	0,15	0,15	0,31	0,51	0,04	0,10	0,31	0,07	0,30
SrO	—	—	—	—	—	—	—	0,04	—	—
BaO	—	—	—	—	—	—	—	0,03	0,06	—
Na ₂ O	4,99	4,60	4,28	4,09	4,58	3,20	3,66	3,90	4,09	3,48
K ₂ O	3,52	2,30	3,72	2,91	3,44	3,65	4,26	5,72	3,77	3,79
H ₂ O +	0,92	0,46	0,96	0,98	0,77	0,96	0,56	0,36	0,27	0,99
H ₂ O —	0,04	0,06	0,03	0,03	0,14	0,16	0,16	0,10	0,08	—
P ₂ O ₅	tr.	—	—	—	tr.	tr.	tr.	tr.	—	—
S	—	—	—	—	—	—	—	0,17	0,06	—
F	—	—	—	—	—	—	—	0,17	0,06	—
CO ₂	—	—	—	1,78	—	—	—	—	—	—
	100,52	100,46	99,67	100,08	100,45	100,63	99,85	100,31	100,06	99,57

Per maggior evidenza e possibilità di confronto riporto anche le formule magmatiche secondo Osann col grafico relativo:

	s	A	C	F	a	c	f	n
I	79,35	7,52	1,10	3,40	12,51	1,33	5,66	7,05
II	80,97	6,32	1,61	3,29	11,26	2,87	5,86	7,54
III	81,65	7,05	—	4,43	12,28	—	7,21	6,09
IV	78,98	6,63	1,65	4,36	10,41	2,61	6,89	6,81 (**)
V	81,91	7,18	1,16	2,21	13,59	2,21	4,19	6,72
VI	83,79	5,72	0,78	3,32	11,65	1,58	6,76	5,67
VII	81,50	6,82	1,57	2,22	12,85	2,96	4,18	5,68
VIII	83,19	6,69	0,07	4,46	11,93	0,12	7,95	6,17
IX	82,92	6,88	0,91	1,50	14,81	1,96	3,23	6,22
X	81,32	6,34	0,70	2,65	13,08	1,45	5,47	6,20

(*) Ho inoltre aggiunto l'analisi chimica e la formula magmatica dell'altro esemplare granitico del Pescale descritto in appendice contraddistinguendolo col numero III.

(**) Per il calcolo della formula magmatica ho tenuto conto della calcite secondaria; non è possibile però detrarre l'emalite, pure accidentale, che in tal modo influenza i valori della formula stessa.



APPENDICE

GRANITO DELLA STAZIONE ENEOLITICA DEL PESCALE

Presso l'Istituto di Mineralogia dell'Università di Modena, tra alcuni campioni di rocce provenienti dagli scavi della stazione preistorica del Pescale, ho rinvenuto anche un ciotolo granitico di piccole dimensioni. Il dottor Malavolti, che aveva fornito il sopra accennato materiale, disse di aver trovato tale ciotolo nei pressi di un fondo di capanna, unitamente ad altro pietrame, tra lo strato archeologico.

Dubbia perciò ne è l'origine, dato che potrebbe anche essere un apporto alluvionale del fiume Secchia, o addirittura essere stato trasportato nel luogo del rinvenimento dalla mano dell'uomo. Perciò è solamente a scopo litognostico che riporto nella presente nota alcuni dati ottici e chimici su esso.

Macroscopicamente si distinguono il feldispato roseo carnicino, la mica nerastra e non troppo abbondante e quarzo lattiginoso. Ca-

ratteristica di questa roccia è una scarsissima coesione, dimodochè i singoli componenti si sgranano con la massima facilità, rendendo così difficile il taglio di una buona sezione.

Al microscopio questo granito è risultato composto da *quarzo*, *ortoclasio*, *microclino*, *plagioclasio*, *clorite* come componenti principali, e da *ilmenite*, *ematite*, *magnetite*, *limonite*, *zircone*, *muscovite*, *fluorite*, come componenti accessori. La struttura è granulare ipidiomorfa.

Quarzo: è in cristalli di notevoli dimensioni, risultanti dall'unione di molti minori, zeppi di inclusioni liquide e gaseose, scarsi di inclusioni solide. Presenta il fenomeno della biassicità anomala.

Ortoclasio: è sempre torbido per totale alterazione che lo rende semiopaco; roseo a luce riflessa.

Microclino: è abbondante e ben conservato, con struttura a grata assai netta. Spesso è micropertitico.

Plagioclasio: per lo più è uniformemente e minutamente alterato. Non mancano però esemplari dotati di un certo grado di freschezza, anche se a frammenti. Frequentissima è la doppia geminazione albite Carlsbad; da notarsi invece l'assenza di zonature.

Col metodo dell'angolo di estinzione simmetrica ho ottenuto valori varianti da una percentuale di 5,5% di An ad una di 11,5%. Nei geminati albite-Carlsbad i valori sono stati i seguenti:

$$\lambda = 75^{\circ} \quad 4^{0/0} \text{ An}; \quad \lambda = 5^{\circ} \quad 6,5^{0/0} \text{ An}; \quad \lambda = 89^{\circ} \quad 6,5^{0/0} \text{ An}$$

Il confronto col quarzo ha dato in posizione incrociata $\alpha < \varepsilon$ $\gamma < \omega$ corrispondente a un tenore variabile fra 0 - 15% di An, in buona armonia coi valori sopra esposti.

Siamo perciò di fronte a un termine acido di oligoclasio-albite, passante ad albite pura.

Clorite: È secondaria per alterazione della mica. Si presenta in lamine pleocroiche dal giallo verdognolo al verde intenso. A volte è solo debolmente o niente affatto pleocroica e in tal caso racchiude segregazioni di numerosi minerali opachi.

Tra i componenti accessori sono frequenti l'*ilmenite*, per la maggior parte leucoxenizzata, tra le tracce dei piani di sfaldatura della clorite; la *magnetite*, sia in cristalletti cubici che in granuli, pure nella clorite; l'*ematite*, sotto forma di laminette e pigmentazioni rosse, facenti parte di vene di riempimento dei numerosi e minuti litoclasi della roccia. Tali litoclasi sono riempiti a volte anche da *limonite* giallastra, che è presente qua e là in granuli e pennellature. Lo *zircone* è pure esso racchiuso nella clorite e pre-

senta intorno ai cristallini isolati aureole pleocroiche. La *muscovite* è presente in piccoli elementi come prodotto di alterazione di plagioclasti e la *fluorite*, piuttosto rara, è sotto forma di granuli incolori e trasparenti nella clorite.

Microscopicamente questo granito si discosta dal precedente per la maggiore acidità del plagioclasio, la presenza del microclino, l'assenza di mica bianca primaria e la grana assai più grossa.

Otticamente può essere confrontato con quello di Guiglia, col quale ha forti analogie sia per la granitura che per la qualità e percentuale dei singoli elementi primari.

L'analisi chimica ha fornito i seguenti risultati:

SiO ₂	74,84
TiO ₂	0,30
Al ₂ O ₃	10,84
Fe ₂ O ₃	1,98
FeO	1,55
MnO	tracce
CaO	1,02
MgO	0,15
Na ₂ O	4,28
K ₂ O	3,72
H ₂ O + 110°	0,96
H ₂ O - 110°	0,03
P ₂ O ₅	n. d.
	99,67

Formula magmatica secondo Niggli

si	al	fm	c	alc	k	mg	c/fm
448,72	37,72	17,43	6,41	38,43	0,64	0,06	0,368

Chimicamente dunque non vi sono apprezzabili diversità dai magmi degli altri esemplari della presente nota, coi quali quest'ultimo ha in comune la forte acidità, il tenore piuttosto alto degli ossidi di ferro e quello assai basso del magnesio. Perciò agevole è anche il confronto coi graniti erratici appenninici e con quelli alpini precedentemente considerati.

BIBLIOGRAFIA

- (1) BERTOLANI M. — *Osservazioni sul granito di Gombio* « Atti Soc. Nat. e Mat. di Modena », Vol LXXIV, 1943.
- (2) ID. — *Contributo alla conoscenza della formazione ofiolitica appenninica. Le serpentine dell'Appennino Parmense.* « Atti Soc. Nat. e Mat. di Modena », Vol. LXXV, 1944.
- (3) GALLITELLI P. — *Sopra un'interessante roccia della Valle del Pescale nell'Appennino Emiliano.* « Atti Soc. Nat. e Mat. di Modena », Vol. LXVIII, 1929.
- (4) ALOISI P. — *I minerali delle rocce.* U Hoepli ed., Milano, 1920.
- (5) GALLITELLI P. — *Ricerche petrografiche sul granito di Baveno.* « Atti Sc. Tosc. Sc. Nat. », XLVI, Pisa, 1937.
- (6) ID. — *Ricerche petrografiche sul Montorfano (Lago Maggiore)* « Atti e Mem. R. Acc. Sc. Lett. Arti di Modena », S. V, Vol. III, 1938.
- (7) TEADWELL W. D. — *Trattato di chimica analitica.* 5.^a ed. ital. sulla 14.^a-16.^a ed. tedesca, Milano, 1939.
- (8) WASHINGTON H. — *Manual of the Chemical analysis of rocks.* New York, 1919.
- (9) SESIA L. — *Analisi chimica delle rocce.* Ist. Geogr. Mil., Firenze, 1937.
- (10) NIGGLI — *Gesteins und Mineralprovinzen.* Berlin, 1923.
- (11) BONATTI S. — *Studio petrografico dei graniti della formazione ofiolitica appenninica.* « Boll. R. Uff. Geol. d'Italia », Vol LVIII, n. 7-10, 1933.
- (12) RODOLICO F. — *Sopra un granito racchiuso nel conglomerato dei Salti del Diavolo in Val Baganza (App. Sett.).* « Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. », Proc. Verb, Vol. XLVIII, Pisa, 1939.
- (13) FERRARI M. — *Le rocce eruttive raccolte nel supposto giacimento di Groppo del Vescovo.* « Mem. R. Acc. Lincei », S. 5, Vol. VIII, Roma, 1911.
- (14) MANASSE E. — *Ricerche petrografiche e mineralogiche sul M. Arco (Isola d'Elba).* « Soc. Tosc. Sc. Nat. », Vol. XXVIII, Pisa, 1912.
 - » ID. — *Stilbite e foresite nel granito elbano.* « Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. », XVII, Pisa, 1900.
 - » ID. — *Su alcune rocce della Crocetta presso S. Pietro in Campo (Isola d'Elba).* « Mem. Soc. Tosc. Sc. Nat. », Vol. XIX, Pisa, 1902.

- (15) ALOISI P. — *Rocce granitiche negli scisti della parte orientale dell'isola d'Elba*. «Atti Soc. Tosc. Sc. Nat.», mem., Vol. XXVI, Pisa, 1910.
» ID. — *Il Monte Capanne*. Pisa, 1919.
- (16) D'ACHIARDI G. — *Metamorfismo di contatto fra calcare e granito al Posto dei Cavoli, presso S. Pietro in Campo (Elba)*. «Mem. Soc. Tosc. Sc. Nat.», Vol. XIX, Pisa, 1902
- (17) NESSIG — *Die jüngeren Eruptogesteine des Mittleren Elba*. «Zeitschr. d. deut. geol.», Eesell. XXXV, fasc. I, Berlin, 1883.
- (18) FUNARO — *Sulla composizione chimica di alcune rocce feldispatiche dell'isola d'Elba*. «Boll. R. Com. Geol.», VII, n. 9-10, Roma, 1886.
- (19) CAVINATO — *Studi petrografici sulla Sardegna sud orientale*. Padova, 1935.
- (20) MARTELLI A. — *Ricerche petrografiche e chimiche sulle formazioni granitiche di Gavorrano*. «Rend. R. Acc. Lincei», Vol. XVIII, S. 5.^a, Roma, 1909.
- (21) ROSSONI P. — *Contributo alla litologia dell'Isola del Giglio*. «Atti Soc. Tosc.», mem., Vol. XLIV, Pisa, 1934.
- (22) MILLOSEVIC F. — *Studi litologici sull'Isola del Giglio. II. Il Granito*. «Rend. R. Acc. Lincei», Vol. XXV, Serie 2.^a, Roma, 1916.
- (23) SANERO E. — *Studi petrografici sul massiccio del M. Bianco. Il Granito*. «Rend. R. Acc. d'Italia, classe sc. mat. fis. e nat.», S. VII, Vol. I, Roma, 1940.
- (24) FENOGLIO M. — *Studi petrografici sulla zona del Canavese. Il Granito di Belmonte*. «Per. di Miner.», Vol. I, Roma, 1930.
» ID. — *Studi petrografici sulla zona del Canavese. Porfidi e tufi*. «Per. di Miner.», Vol. II, Roma, 1931.
- (25) MARTELLI A. — *Sul porfido quarzifero della Val d'Ega*. «Per. di Miner.», Vol. I, Roma, 1930.
- (26) GALLITELLI P. — *Analisi chimica del granito di Montorfano e del granito e della tormalina di Alzo*. «Rend. R. Acc. Lincei», Vol. XXVI, S. 6.^a, Roma, 1937.
- (27) ANDREATTA C. — *Studio petrografico del complesso eruttivo del M. Croce in Alto Adige*. «Per. di Miner.», Vol. VIII, Roma, 1937.
» ID. — *Ricerche petrografiche nella regione di Cima d'Asta*. «Mem. Ist. geolog. R. Università di Padova», Vol. X, 1932.
- (28) NOVARESE V. — *La zona del Canavese e le formazioni adiacenti*. «Memorie descrittive della Carta geologica d'Italia», Vol. XXII, Roma, 1929. App. A, pag. 65.

I lepidotteri del modenese

Primo contributo alla loro conoscenza sistematico-biologica (*)

Molto incomplete e di vecchia data sono le notizie che si hanno intorno alla fauna dei lepidotteri del modenese. Ed i pochi dati tramandatici da Bargagli, Carruccio, Tognoli, Fiori e Costantini — i soli che, a nostro sapere, hanno lasciato un ricordo delle esplorazioni fatte nella nostra provincia — presentano così scarso interesse dal punto di vista biologico, che ci è parso opportuno, data l'importanza dell'argomento, riprendere in esame la questione, per considerarla più ampiamente sotto l'aspetto bio sistematico. Il che, d'altronde, ha già avuto inizio, quantunque dal lato puramente biologico, per opera di uno di noi (Balli) con lo studio di alcune specie, parte delle quali hanno già ricevuto un primo contributo.

Questa nota ha carattere eminentemente preventivo. In essa non figurano che poche specie raccolte nel tardo autunno di quest'anno (1944) in località S. Eusebio (Comune di Castelvetro) ai piedi delle colline modenesi ad una altitudine di circa m. 110 s/m.

Le osservazioni sono state fatte nei giorni indicati nel primo prospetto che segue, e nelle ore comprese fra le 11 e le 14,30; nel prospetto figurano, pure, il numero degli individui, separatamente per sesso, catturati alle singole date, ed il numero (scritto fra parentesi) di quelli visti in volo. Nel secondo prospetto figurano i dati meteorologici del periodo compreso fra l'inizio e la fine delle osservazioni; le date contrassegnate con estersico corrispondono ai giorni di osservazione. Ad eccezione di *Pararga maegera* var. *egerides* Stgr., rinvenuta fra alberi di *Robinia pseudacacia*, e di *Vanessa atalanta* L. cacciata in un frutteto di *Pirus malus* L. e *Prunus do-*

(*) Dall'Istituto di Zoologia e Anatomia Comparata della Università di Modena (Direttore prof. C. Guareschi) e dal Laboratorio di Zooculture della Università di Parma, diretto dal prof. A. Balli.

D A T A	Temperatura in ctg.				Stato del cielo durante le ore di osservazione
	ore 8	ore 14	ore 19	Media	
18 (*) ottobre 1944	14,1	18,5	17,7	16,8	$\frac{3}{4}$ coperto con sole
19 (*) »	14,1	17,3	16,7	16,0	$\frac{1}{4}$ » »
20 (*) »	13,3	16,1	17,6	15,7	sereno con sole
21 »	12,1	13,7	13,4	13,1	coperto
22 »	11,7	11,5	11,4	11,5	» con pioggia
23 »	11,3	12,5	13,0	12,3	»
24 (*) »	11,7	13,7	13,4	12,9	» con sole ad intervalli
25 »	11,6	12,1	12,3	12,0	» con folta nebbia
26 »	12,1	12,6	11,7	12,1	» con pioggia
27 »	11,3	12,2	12,7	12,1	» »
28 »	11,3	12,5	12,1	12,0	» »
29 »	9,7	10,7	10,5	10,3	» »
30 (*) »	9,2	10,9	10,6	10,2	coperto
31 (*) »	8,6	13,1	10,6	10,8	$\frac{1}{2}$ coperto con sole ad intervalli
1 novembre 1944	10,3	10,4	9,9	10,2	coperto con pioggia
2 »	9,1	9,7	9,4	9,4	» »
3 (*) »	7,7	8,9	8,6	8,4	» »
4 »	7,9	10,5	12,1	10,2	» con sole ad intervalli
5 (*) »	6,3	10,4	12,1	9,6	sereno con sole
6 (*) »	7,0	13,3	12,1	10,8	$\frac{1}{4}$ coperto con sole
7 »	7,6	11,1	9,9	9,5	$\frac{1}{2}$ » »
8 »	6,6	8,9	8,7	8,1	coperto con folta nebbia
9 »	7,1	11,4	10,3	9,6	$\frac{1}{2}$ coperto con sole
10 »	5,5	8,8	8,1	7,5	$\frac{1}{2}$ » »
11 (*) »	5,0	8,5	8,8	7,4	$\frac{1}{4}$ » »
12 (*) »	4,2	5,4	5,7	5,1	$\frac{1}{2}$ » »
13 »	2,4	4,1	4,2	3,6	coperto con folta nebbia
14 »	4,3	6,2	5,5	5,3	» » »
15 »	4,8	6,7	6,5	6,0	$\frac{1}{4}$ coperto con sole
16 »	2,7	9,7	7,1	6,5	sereno con sole
17 »	3,9	8,3	7,6	6,6	$\frac{1}{4}$ coperto con sole
18 »	3,3	6,8	7,4	5,8	$\frac{1}{2}$ » »
19 (*) »	5,4	7,6	7,5	6,8	$\frac{3}{4}$ » »

mestica L., tutti gli individui delle altre specie sono stati catturati in un prato di *Medicago sativa* L.

Carruccio, in una sua lettera indirizzata al Presidente della Società Entomologica Italiana e resa nota da Bargagli, scrive: « ... non possediamo stampati pel modenese nè Cataloghi illustrativi nè altri lavori speciali, o più o meno complessivi, destinati a farci conoscere la natura e ricchezza incontrastabile di questa Fauna entomologica ». Lo stesso A. in un lavoro successivo alla data d'invio di quella sua lettera, così inizia la sua esposizione: « La provincia di Modena, tanto bene illustrata nella sua storia artistica, letteraria ecc., e solo in alcune parti della sua storia naturale, non possiede poi alcun lavoro che illustri debitamente e con qualche ampiezza la Fauna entomologica ». E più oltre: « Aggiungo pure che non già un catalogo metodico ho inteso di compilare, bensì una semplice enumerazione di tutte le specie poco per volta prese in varie località della provincia durante il 1872 e 1873 ». Carruccio termina queste sue premesse con un auspicio: « Desidero che nel nostro Bullettino possano pubblicarsi numerose notizie sui risultati delle escursioni fatte in più provincie del regno da' nostri consoci ».

Più ampie notizie ci sono tramandate da Tognoli, il quale antepone alla enunciazione dei suoi dati queste parole: « Da quanto è a mia cognizione, nessuno finora studiò e classificò la Fauna entomologica delle Provincie che formarono una volta il Ducato di Modena ». Però, lo stesso Tognoli ammette l'incompletezza della sua opera, scrivendo: « In oltre quindici anni di esperienza ebbi ad incontrare cento quarantasette specie di Lepidotteri con non poche varietà; ma siccome le mie escursioni ed i miei studi Entomologici ebbero una lunga interruzione e furono sempre ristretti ad una limitatissima estensione di terreni, quanto più avrei ottenuto tempo ed attività maggiori ad essi studi avessi potuto dedicare? » E termina col dire: « Non cesserò mai dal pregare con insistenza acchè vengano studiate diligentemente ed in stagioni diverse tanto le nostre valli, come i nostri alti monti . . . , poichè ivi la messe deve essere molto ricca, e se non superiore, tale almeno da pareggiare quella delle altre Provincie consorelle ».

Ma chi più di ogni altro si è, a nostra conoscenza, occupato della questione è Fiori il quale, prima di passare alla enumerazione delle specie, ricorda: « Le provincie di Modena e Reggio, se non furono totalmente dimenticate dagli Entomologi, certamente non ponno vantarsi di essere state sufficientemente illustrate ». E più

oltre, dopo avere preso in considerazione quanto si sapeva a quell'epoca sugli insetti della regione, Fiori scrive: « Ciò è quanto si conosce sugli insetti del Modenese, ed è ben poco. Non si pensi già che le nostre provincie siano scarse di insetti, che anzi se ne può fare da noi ricca messe, quanto in altra Provincia: soltanto mancò al Modenese ed al Reggiano, chi si applicasse a questi studi cotanto dilettevoli. Sarei felice se il mio esempio fosse da molti seguito, e così contribuire alla illustrazione del natio paese ». In un supplemento a questa sua prima parte, dopo avere elencato altre specie, lo stesso Fiori termina la sua opera mettendo in evidenza che: « Questo non è che un contributo, e spero riempire le molte lacune con un supplemento.... », supplemento che non ci risulta sia stato reso noto

Notizie più recenti, ma di catture notturne, e che per il momento non ricordiamo anche perchè facenti parte della fauna modenese d'alta montagna, ci sono fornite da Costantini.

Nell'espore i risultati delle nostre ricerche, indicheremo, per semplicità e chiarezza: alla 1) la parte bibliografica riguardante l'area generale di diffusione delle specie studiate; alla 2) i dati bibliografici riguardanti il modenese; alla 3) le osservazioni personali; alla 4) le considerazioni e le conclusioni.

Pieris brassicae L.

1) Secondo Godart, Duponchel, Guénaux, Craveri questa specie vola tutto l'anno; secondo Lucas e Boisduval, dall'inizio della primavera fino al termine dell'autunno; secondo Depniset, Guide du jeune naturaliste e Girard, durante tutta la bella stagione; secondo Lampert, dal maggio all'autunno; secondo Brehm, dalla primavera all'autunno. Silvestri e Della Beffa parlano solo delle prime apparizioni dell'anno, che avvengono in primavera da parte delle farfalle che hanno svernato allo stadio di crisalide.

Tutti i precitati A.A. sono d'accordo nell'ammettere che detta specie è ovunque comune.

Lampert, Guénaux, Senna e Della Beffa parlano di svernamento della specie allo stadio di crisalide; mentre Craveri scrive che le crisalidi dell'ultima generazione generalmente svernano.

Secondo Senna, le ali anteriori misurano, dal loro punto di inserzione all'apice, mm. 29-34. In quanto all'apertura alare, Girard parla di mm. 65, Guénaux di mm. 60, Craveri di mm. 60-70, Della Beffa di mm 55-60.

2) Tognoli asserisce che la farfalla vola dall'aprile al novembre in forma comune e riporta, per l'apertura alare, le misure seguenti: maschi mm. 50-52, femmine mm. 65-69.

3) Da parte nostra, gli unici due esemplari furono catturati il 18 ottobre. Lunghezza delle ali anteriori misurata dall'angolo basale al loro apice: maschio mm. 32,5 e femmina mm. 30,5 Apertura alare: maschio mm. 69,5 e femmina mm. 64,5. Lunghezza del corpo: maschio mm. 20,5 e femmina mm. 19,5.

4) Data l'epoca di cattura dei nostri animali, non ci è permesso prendere in considerazione, tanto per questa prima specie che per le successive, che l'epoca di scomparsa degli adulti.

Solo Tognoli si esprime in termini precisi per quanto concerne i mesi di volo della specie allo studio; gli altri A.A., invece, si esprimono in termini molto vaghi. Comunque, tutti, compreso lo stesso Tognoli, non hanno fatto menzione delle condizioni particolari di cattura degli animali cui danno notizia; come se non fossero a conoscenza che i fattori climatici ed ambientali hanno, nelle singole regioni, la loro importanza sull'epoca di volo delle farfalle. E ciò sia detto per tutte le specie trattate nella presente nota. A conferma di questa nostra asserzione sta il fatto della non concordanza fra i dati nostri e quelli di Tognoli; quantunque anche questi, come noi, si sia dedicato allo studio dei lepidotteri del modenese. Certamente altri fattori, ancora in gran parte sconosciuti, oltre quelli climatici ed ambientali accennati, sono intervenuti per apportare variazioni nei nostri dati; di qui la necessità di raccolta metodica e sistematica di quanti più dati possibili nel corso di ogni ricerca, perchè sempre maggior luce possa venire fatta sulle questioni controverse.

Per quanto concerne la questione riguardante lo svernamento allo stadio di crisalide degli individui dell'ultima generazione, i pareri di Lampert, Guénaux, Senna e Della Beffa lasciano adito a discussione; propendiamo a confermare le ipotesi di Craveri. Noi escludiamo, a priori, che tutti gli individui dell'ultima generazione svernino allo stadio di crisalide ed è nostra convinzione che ciò avvenga solamente per quelli nati da ovature deposte in ritardo nell'annata, quando cioè la temperatura è scesa ad un livello per cui gli animali non possono raggiungere lo stadio di adulto nell'anno stesso di schiusura delle uova. Infatti, se ci si attiene rigorosamente al concetto, come più sopra abbiamo ricordato, che gli individui dell'ultima generazione non sfarfallano che nell'anno successivo, si dovrebbe ammettere, soprattutto per quelle farfalle

che volano nel tardo autunno, una nuova generazione prima della fine dell'anno; il che è assolutamente da escludersi date le sfavorevoli condizioni climatiche della stagione. E questo è un bene per l'economia agraria, in quanto solo una parte degli individui dell'ultima generazione di questi temibili parassiti dei nostri orti, possono così propagare la specie l'anno seguente.

Dato che solo due sono stati gli individui catturati, non possiamo, in questo nostro primo lavoro, prenderne in considerazione le dimensioni e metterle a confronto con quelle riportate dagli altri. Osserviamo, comunque, che le misure segnalateci dai lepidotterologi più sopra citati, avrebbero maggior valore se fossero accompagnate da indicazioni riguardanti la regione e l'epoca dell'anno a cui esse misure vanno riferite e se gli stessi avessero considerato un sesso distinto dall'altro; condizione quest'ultima, invece, rispettata dal solo Tognoli.

Pieris rapae L.

1) Riguardo l'epoca di apparizione e la frequenza con la quale ci appaiono gli adulti di questa specie, gli A. A. ripetono quanto hanno riferito intorno alla precedente. Solo Lampert è di parere diverso, in quanto considera le farfalle di *Pieris rapae* in volo dalla primavera all'autunno e quelle di *Pieris brassicae* una prima volta (quelle della prima generazione) in maggio-giugno ed una successiva (quelle della seconda generazione) dalla fine di luglio all'autunno.

Nessuno, fra gli A. A. che abbiamo nominato, indica, contrariamente a quanto è ammesso intorno alla specie affine precedentemente descritta, a quale stadio della vita dell'insetto sverna questa specie.

Secondo Senna, le dimensioni delle ali anteriori misurate dal loro angolo di inserzione al loro apice, sono comprese fra mm. 20 e 27. La lunghezza dell'animale è, secondo Guénaux, di mm. 15. Guénaux ammette un'apertura alare di mm. 50, Silvestri di mm. 40-58, Della Beffa di mm. 35-42.

2) Tognoli ripete, per questa specie, quanto ha scritto ed è stato da noi riferito, intorno alla precedente; e riporta le misure seguenti relativamente all'apertura alare: maschi mm. 35-37 e femmine mm. 55-60.

3) Le nostre catture si sono protratte fino al 12 novembre.

Dimensioni delle ali anteriori misurate dall'inserzione all'apice: Maschi, minimo mm. 21 e massimo mm. 26; femmine, minimo mm. 24

e massimo mm. 25. Apertura alare: Maschi, minimo mm. 45 e massimo mm. 57; femmine, minimo mm. 51 e massimo mm. 53. Lunghezza del corpo: Maschi, minimo mm. 14,5 e massimo mm. 16; femmine, minimo mm. 15,5 e massimo mm. 16.

4) Quanto abbiamo detto di *Pieris brassicae* a proposito delle notizie troppo vaghe emesse dagli A.A. citati circa le epoche di volo della specie, ha valore pure per *Pieris rapae*. I risultati delle nostre raccolte rilevano, tuttavia, che *Pieris rapae*, contrariamente alle affermazioni altrui, continua i suoi voli, almeno nella nostra regione, in epoche molto più inoltrate rispetto a *Pieris brassicae*. Ciò è riscontrabile non solo dal confronto fra le date ultime di cattura delle due specie, ma anche dal numero degli individui catturati, maggiore in *Pieris rapae*.

Quantunque poche siano le farfalle da noi catturate per un rigoroso confronto fra i dati nostri e quelli d'altri, tuttavia si riscontrano in esse misure che presentano una certa concordanza con quelle di cui parlano Senna, Guénaux, Silvestri. Non così dicasi per Della Beffa che parla di apertura alare inferiore di parecchio a quella delle nostre farfalle; e così pure per Tognoli che riferisce su aperture alari nei suoi maschi molto inferiori alle aperture alari dei nostri, e viceversa per le femmine. Non avendo, però, alcuno dei precedenti ricercatori, fornito indicazioni sui luoghi, sull'epoca e sulle condizioni generali di cattura degli animali da loro studiati, non è possibile la ricerca delle ragioni per le quali vi è concordanza o meno fra i risultati raggiunti dai vari entomologi. Inoltre, nessuno degli A.A. da noi citati, fatta eccezione per Tognoli, ha fatto distinzione fra i sessi.

Colias edusa F.

1) Secondo Godart e Duponchel la specie vola in maggio ed in agosto; secondo Lucas, in maggio e luglio; secondo Depuiset, in maggio e dalla fine di luglio alla fine di settembre; secondo Guide du jeune naturaliste, è abbastanza comune in estate; secondo Girard, in maggio e poi in agosto e settembre, e nelle annate calde talvolta anche in ottobre; secondo Lampert, dall'aprile all'ottobre.

In generale, la specie è considerata abbastanza comune.

Senna parla di dimensioni delle ali anteriori, misurate dall'angolo della loro inserzione al loro apice, comprese fra mm. 24 e 27.

2) Carruccio riferisce su catture straordinariamente abbondanti nei pressi di S. Faustino, rione della città di Modena, nella stagione estiva ed autunnale dell'anno 1873. Tognoli considera la

specie ovunque abbondante, tanto al piano che al colle, da maggio a tutto ottobre; con catture, tuttavia, durante l'autunno, di un maggior numero di femmine.

Tognoli riporta le misure seguenti relative all'apertura alare: Maschi, mm. 42-44; femmine, mm. 48-50. Egli ammette, tuttavia, più oltre, d'aver costantemente incontrato individui d'ambo i sessi con dimensioni comprese fra mm. 32 e 34.

3) Le nostre catture si sono protratte fino al 6 novembre. Lunghezza delle ali anteriori, misurata dall'inserzione all'apice: Maschi, minimo mm. 22 e massimo 27; femmine, minimo mm. 26 e massimo mm. 28,5. Apertura alare: Maschi, minimo mm. 49 e massimo mm. 57; femmine, minimo mm. 56,5 e massimo mm. 60. Lunghezza del corpo: Maschi, minimo mm. 16 e massimo mm. 19; femmine, tutte mm. 19 circa.

4) Mentre gli A.A. consultati sono tutti d'accordo, nelle grandi linee, sull'epoca d'apparizione degli adulti, diversi, invece, sono i pareri sulla data della loro scomparsa. La qual cosa è da noi attribuibile più ad errori o mancanza di sufficienti osservazioni che a condizioni varie, fra le quali quelle inerenti all'ambiente, inteso dal punto di vista generale, poichè la grande maggioranza degli A.A. si riferisce ad uno stesso Paese, la Francia, la quale, quantunque sia dotata di climi diversi nelle sue diverse regioni, questi non sono tanto vari da creare differenze così rilevanti, tali da indurre la specie a variare sì profondamente la durata del suo periodo di volo.

Le nostre catture, da considerarsi peraltro abbondanti in relazione al periodo di caccia, hanno avuto termine, comunque, in un'epoca più avanzata rispetto a quella segnalataci dagli A.A. stranieri citati, come anche da Tognoli per lo stesso modenese.

Pure in contrasto con le osservazioni fatte da Tognoli sta il fatto che noi abbiamo catturato, in piena stagione autunnale, più maschi (in numero di 11) che femmine (in numero di 4). Luoghi, clima, ore della giornata e condizioni generali di cattura sono, per noi, almeno parte delle cause principali per cui la cattura di un sesso può prevalere su quella dell'altro.

Le misure riportate da Senna, il quale peraltro non fa distinzione di sessi, non concordano che parzialmente con le nostre, le quali, messe a confronto con quelle degli individui di cui dà notizia il precedente A., presentano una maggior variabilità. Tognoli riporta misure, soprattutto quelle degli individui da lui stesso osservati, inferiori di molto alle nostre. Tali differenze, come le pre-

cedenti relative ai dati di Senna, non possono tuttavia essere sottoposte a severo esame per la ricerca delle ragioni che vi hanno influito, poichè nè quest'ultimo, nè Tognoli hanno lasciato alcun particolare riferimento sulla cattura degli animali.

Pararga maegera L.

1) Secondo Godart e Duponchel, e Lucas, questa farfalla vola in maggio ed in luglio; secondo Depuiset, una prima volta dagli ultimi giorni di maggio agli ultimi giorni di giugno ed una seconda volta a fine luglio ed in agosto; secondo Guide du jeune naturaliste, da giugno a settembre; secondo Girard, dapprima in maggio ed una seconda volta in luglio-agosto; secondo Lampert, in estate; secondo Senna, dalla primavera all'autunno.

Lucas, Depuiset, Guide du jeune naturaliste e Senna considerano la specie comune o comunissima.

Girard parla di mm. 40 di apertura alare nei maschi; e Senna di mm. 23-25 nelle dimensioni delle ali anteriori misurate dall'angolo basale al loro apice.

2) Tognoli considera la specie abbastanza copiosa, ovunque, dall'aprile al novembre; con apertura alare di mm. 35-40 nei maschi e mm. 45-50 nelle femmine.

3) Noi abbiamo notato la presenza di farfalle fino al 19 novembre.

Dimensioni delle ali anteriori, misurate dall'angolo d'inserzione al loro apice: Maschi, minimo mm. 21 e massimo mm. 22; femmine, minimo mm. 19,5 e massimo mm. 23. Apertura alare: Maschi, minimo mm. 45 e massimo mm. 47; femmine, minimo mm. 42 e massimo mm. 49,5. Lunghezza del corpo: Maschi e femmine, tutti all'incirca mm. 15.

4) Mentre i riferimenti degli A.A. stranieri relativi all'epoca di scomparsa dell'adulto, sono molto diversi dai nostri, quelli di Senna ed in particolare modo quelli di Tognoli s'avvicinano ai nostri reperti. Di qui una nuova prova della poco attendibilità da parte dei dati riferitici da certi A.A.; la qual cosa è da noi attribuibile, come abbiamo ricordato per altre specie precedentemente elencate, non tanto a variabilità d'ambiente e di clima, quanto ad un'attenzione poco scrupolosa degli entomologi nella raccolta delle loro osservazioni.

Quantunque il numero degli individui da noi catturati non sia sufficiente, dato il breve periodo in cui è durata la loro cattura, per studiarne statisticamente le dimensioni e metterle a confronto

con quelle riportate da altri, tuttavia le misure dei nostri animali appaiono inferiori a quelle date da Senna. Comunque, non avendo questi riportato alcuna indicazione sulla data, sulla località e sulle condizioni generali di cattura delle sue farfalle, non è possibile la ricerca delle cause che stanno alla base delle controversie. Senna, inoltre, non fa di nuovo distinzione di sesso nell'enunciazione dei propri dati. Dal confronto, ora, delle misure delle nostre farfalle con quelle di Tognoli, mentre per le femmine le differenze appaiono lievi, i nostri maschi presentano un'apertura alare assai superiore a quella dei maschi di Tognoli. Per le stesse ragioni per le quali non ci riesce possibile ricercare le cause delle differenze fra le dimensioni più sopra citate relative alle farfalle di Senna e nostre, non siamo in grado di indagare sulle divergenze esistenti fra le misure dei nostri animali e quelli di Tognoli.

Pararga maegera var. *egerides* Stgr.

1) Godart e Duponchel affermano che questa specie vola in aprile e luglio; Depuiset, in aprile-maggio e luglio-agosto; Guide du jeune naturaliste, durante tutta la bella stagione; Girard, dal principio di aprile ad ottobre; Lampert, in maggio-giugno e luglio-settembre; Senna, nella bella stagione.

Depuiset la considera comunissima; Guide du jeune naturaliste e Senna, comune.

Girard parla di sessi simili aventi mm. 40 di apertura alare; e Senna, di ali anteriori misuranti, dalla loro inserzione all'apice, mm. 20-22.

2) Tognoli considera la specie poco abbondante e presente dall'aprile all'avanzato giugno, quantunque egli l'abbia riscontrata qualche volta anche in autunno. Lo stesso A. ammette un'apertura alare di mm 40-42 nei maschi e mm. 42-50 nelle femmine.

3) Noi abbiamo catturato un solo maschio il 19 ottobre.

Lunghezza delle ali anteriori, dall'angolo basale all'apice, mm. 24. Apertura alare mm. 46,5. Lunghezza del corpo mm. 13,5.

4) Quantunque la cattura di un solo esemplare alla data ricordata non sia sufficiente a determinare il termine ultimo di scomparsa della specie, almeno per la nostra regione, poichè il caso potrebbe rappresentare un'eccezione determinata non sappiamo da quali fattori, tuttavia essa data trova conferma nei reperti di Girard e Tognoli, contrariamente a quanto si sa dagli altri A.A. i cui riferimenti troppo si distanziano dai nostri perchè possa venire loro attribuito qualche valore. E ciò in base a quanto abbiamo esposto

in merito trattando di *Pararga maegera*; quantunque debbasi tenere presente anche il caso della rarità di questa varietà ammessa dal Tognoli, mentre altri, la considerano comunissima o comune. La qual cosa deve, tuttavia, essere considerata sotto un aspetto non troppo categorico, poichè molti sono i fattori la cui azione può avere ripercussione sulla frequenza o meno di una forma anche indipendentemente dalla regione.

Con un solo esemplare non è possibile fare veri confronti e trarre serie conclusioni sulle misure somatiche. Tuttavia, in attesa di più numerose catture, rileviamo che i dati di Senna corrispondono più o meno ai nostri; quantunque, come per le specie precedenti, egli non faccia distinzione fra i sessi mentre Girard e Tognoli parlano di apertura alare nei maschi molto minore di quella riscontrata nel nostro esemplare. Se questa nostra constatazione venisse ulteriormente confermata — il che si avrebbe solamente partendo, come già abbiamo accennato, da un numero sufficientemente elevato di individui — non sarebbe, però, possibile rendersi ragione del perchè le nostre farfalle presentano dimensioni maggiori di quelle ricordate da Girard e da Tognoli a causa della mancanza di notizie da parte dei due A.A. relative alla cattura degli animali, atte a scoprirne le ragioni.

Coenonimpha pamphilus L.

1) Secondo Godart e Duponchel questa specie vola in maggio ed in luglio; secondo Depuiset, in maggio ed in luglio e agosto; secondo Girard, in maggio, luglio-agosto ed anche fino al termine di settembre; secondo Lampert, in estate; secondo Senna, in primavera ed in estate.

Per Depuiset e Guide du jeune naturaliste essa è molto comune; secondo Senna è comune.

Relativamente alle dimensioni delle ali anteriori, misurate dalla loro inserzione al loro apice, si hanno i dati di Senna che ammette mm. 14-16. L'apertura alare è, secondo Girard, di mm 29 nei maschi ed un po' più nelle femmine.

2) Carruccio ha visto la specie volare dalla primavera all'autunno e Tognoli dall'aprile al novembre. Ambedue la considerano comunissima.

Per Tognoli, l'apertura alare misura da mm 26 a 28 nei maschi, e da mm. 27 a 30 nelle femmine.

3) Le nostre ultime catture datano dal 20 ottobre.

Lunghezza delle ali anteriori, dall'angolo basale all'apice: Maschi, minimo mm. 14 e massimo mm. 15; femmine, mm. 15 e 16. Apertura alare: Maschi, minimo mm. 30 e massimo mm. 32; femmine, mm. 31 e 32. Lunghezza del corpo: Maschi, minimo mm. 10 e massimo mm. 11,5; femmine, mm. 8 e 8,5.

4) Mentre le notizie trasmesseci da Carruccio e Tognoli, relative all'epoca di scomparsa della specie, trovano conferma nei nostri dati; del tutto diversi e quindi, a nostro avviso, privi di alcun valore, sono i dati riportati dagli A.A. stranieri e da Senna per la stessa Italia. Le ragioni per cui riteniamo inesatte le indicazioni dateci da questi ultimi A.A., sono le stesse di quelle precedentemente elencate per altre specie.

Le misure a cui accenna Senna concordano con quelle delle nostre farfalle; egli tuttavia, ripetiamo, non fa distinzione di sessi. L'apertura alare supera quelle ammesse da Girard, come pure da Tognoli per lo stesso modenese. Ulteriori e più numerose catture confermeranno o meno queste nostre constatazioni. Una ricerca delle cause per cui i dati nostri non concordano con quelli di Girard e di Tognoli qualora queste differenze continuassero a sussistere, non sarà in ogni modo possibile per le medesime ragioni più volte ricordate in simili casi.

Coenonimpha pamphilus var. *lyllus* Esp.

1) Girard scrive che questa specie è abbastanza comune in maggio e luglio nella Francia meridionale. Senna la cita per l'Italia.

2) Questa varietà non viene citata per il modenese.

3) Le nostre catture si limitano ad una sola femmina cacciata il 20 ottobre.

Lunghezza delle ali anteriori, misurate dall'inserzione all'apice, mm. 15,5. Apertura alare, mm. 32. Lunghezza del corpo mm. 9.

4) Questa varietà citata per la prima volta, da noi, per il modenese, è scomparsa, in questa regione, almeno nell'anno in corso, molto più tardi di quanto non venga ricordato per la Francia. A meno che non si tratti di un'eccezione, anche perchè è stato catturato un solo esemplare; la qual cosa verrà messa in luce in avvenire.

Anche le varie dimensioni dell'adulto di questa varietà verranno riprese in esame partendo da un adeguato numero di esemplari.

Licaena icarus Rott.

1) Lampert scrive che la farfalla vola da maggio a settembre; mentre Senna la considera presente, in forma comune, durante la bella stagione.

Secondo Senna, le ali anteriori misurano, dall'inserzione all'apice, mm. 14-18.

2) Tognoli scrive che la farfalla, abbastanza comune, vola in primavera avanzata ed in agosto.

Questi ammette un'apertura alare compresa fra mm. 32 e 34, tanto nei maschi che nelle femmine.

3) Le nostre ultime catture datano dal 20 ottobre.

Lunghezza delle ali anteriori dall'inserzione all'apice: Maschi, minimo mm. 13,5 e massimo mm. 16,5; femmine, minimo mm. 14 e massimo mm. 15. Apertura alare: Maschi, minimo mm. 30 e massimo mm. 32; femmine, minimo mm. 28 e massimo mm. 33. Lunghezza del corpo: Maschi e femmine, minimo mm. 10 e massimo mm. 10,5.

4) Nessuno degli A. A. citati riporta dati che abbiano conferma nei nostri. E poichè il numero degli animali da noi catturati non è da considerarsi esiguo in base alle poche giornate di caccia, penso che i dati di Tognoli non trovino corrispondenza nei nostri non tanto per non avere egli eseguito metodi di ricerca non corrispondenti allo scopo — poichè si è sempre dimostrato, a nostro parere, ed in base ai risultati suoi nei confronti dei nostri, scrupoloso nel fare le proprie osservazioni — quanto per avere ricercato in condizioni di tempo e di luogo tutte particolari, ben diverse dalle nostre. Non così dicasi degli altri A. A., i cui riferimenti non incontrano il nostro consenso.

In quanto alle dimensioni, quelle riportate da Senna che non fa distinzione di sessi, appaiono leggermente superiori alle nostre; lo stesso dicasi dell'apertura alare nei confronti dei dati di cui dà notizia Tognoli. Le ragioni per cui gli individui catturati da noi appaiono di dimensioni inferiori rispetto a quelli degli A. A. precipitati, possono essere varie; il venirne a conoscenza è, però, impossibile, sempre per le stesse ragioni a cui più volte abbiamo accennato, cioè della mancanza di ogni indicazione sulla cattura degli animali da parte degli entomologi stessi.

Chrysophanus phlaeas L.

1) Secondo Godart e Duponchel la farfalla vola in aprile e maggio; secondo Lucas in primavera ed alla fine dell'estate; secondo Depuiset, dai primi bei giorni (aprile) fino all'autunno, ma principalmente in maggio, luglio e agosto; secondo Guide du jeune naturaliste, durante la bella stagione; secondo Girard, quasi tutto l'anno, fino a novembre; secondo Lampert, in primavera e dal luglio all'ottobre; secondo Senna, dalla primavera all'autunno.

Secondo Depuiset e Senna la specie è molto comune; secondo Guide du jeune naturaliste essa è comune.

Depuiset e Girard parlano di svernamento allo stadio di crisalide.

Da parte di Senna, le dimensioni delle ali anteriori, misurate dall'angolo basale al loro apice, sono di mm. 18 - 20.

2) Tognoli ne considera il volo dall'aprile al settembre avanzato.

Carruccio considera questa specie piuttosto rara in montagna, ma alquanto più facile a trovarsi in talune località della pianura. Tognoli la ricorda come abbastanza comune al piano; piuttosto rara al colle ed al monte.

Secondo Tognoli, l'apertura alare misura mm. 28-32 tanto nei maschi che nelle femmine.

3) La data ultima di cattura dei nostri individui risale al 6 novembre.

Dimensioni delle ali, misurate dall'angolo basale al loro apice: Maschio, mm. 15; femmine, mm. 14 e 15. Apertura alare: Maschio, mm. 33; femmine, mm. 31 e 33,5. Lunghezza del corpo: Maschio, mm. 12; femmine, mm. 11.

4) I pareri dei diversi A.A. sulla data di scomparsa della specie sono discordi. Comunque vi è, compreso Senna per l'Italia, chi parla di autunno ed anche, con maggior precisione, di novembre; il che è confermato dai nostri dati. Tognoli non concorda con noi; e questo potrebbe dipendere, come abbiamo riferito per la precedente specie, da diverse condizioni di cattura.

Senna e Tognoli riportano dimensioni inferiori alle nostre; del che non possiamo renderci ragione dato che non conosciamo le condizioni di cattura delle farfalle studiate dai due precedenti A.A.

In quanto all'ammissione fatta da Depuiset e da Girard secondo i quali la specie svernerebbe allo stadio di crisalide, valga quanto abbiamo detto di *Pieris brassicae* escludendo quanto abbiamo riferito intorno all'economia agraria, non figurando *Chrysophanus phlaeas* fra le specie parassite di piante coltivate.

Lampides telicanus Lang.

1) Secondo Godart e Duponchel le farfalle di questa specie volano in luglio, e secondo Lampert in estate.

Lampert ne cita l'abbondanza nel sudeuropa.

Secondo Tognoli l'adulto vola in agosto e settembre e ne considera la specie assai rara.

Lo stesso Tognoli ammette un'apertura d'ali compresa fra mm. 32 e 34.

3) Le nostre ultime catture sono del 20 ottobre.

Dimensioni delle ali anteriori, misurate dall'angolo basale al loro apice: Maschi, minimo mm. 12 e massimo mm. 13,5; femmine, mm. 12,5 e 15. Apertura alare: Maschi, minimo mm. 26 e massimo mm. 28; femmine, mm. 26 e 32. Lunghezza del corpo: Maschi, minimo mm. 9 e massimo mm. 10; femmine, mm. 9 e 9,5.

4) La data ultima di cattura degli individui da noi studiati sorpassa di alquanto quella ammessa dagli A.A. stranieri citati. Anche Tognoli accenna a risultati che non trovano riscontro nei nostri. Ne è forse causa la grande rarità della specie, ammessa da Tognoli stesso, riscontrata, anche da noi; per cui le nostre osservazioni non concordano che parzialmente con quelle dell'A.

L'apertura alare delle nostre farfalle è inferiore di parecchio a quella ammessa da Tognoli per gli individui della stessa provincia. E poichè questi non accenna a differenze sessuali, aggiungiamo che noi abbiamo riscontrato dimensioni minori nei maschi; la qual cosa verrà sottoposta a conferma statistica non appena saremo in possesso di sufficiente materiale. Comunque, poichè Tognoli, come più volte in precedenza abbiamo messo in risalto per ogni specie da noi studiata, non ha lasciato alcuna indicazione, al pari di tutti gli A.A. ricordati in questa nota, concernente le condizioni di luogo, d'ambiente e di tempo, in cui egli ha operato, non è possibile ricercare le cause per cui gli individui della specie che stiamo trattando presentano nel caso nostro una apertura alare minore rispetto a quelli a cui accenna Tognoli.

Carcarodus lavatherae Esp.

1) Lampert parla di apparizioni in estate. Senna non lo cita fra le specie italiane.

2) Questa specie non viene ricordata per il modenese

3) Le nostre ultime catture datano dal 20 ottobre.

Dimensioni delle ali anteriori, misurate dall'inserzione all'apice: Maschio, mm. 13; femmine, mm. 14 e 15,5. Apertura alare: Maschio, mm. 27; femmine, mm. 29 e 33. Lunghezza del corpo: Maschio, mm. 11; femmine, mm. 11,5 e 13.

4) Questa specie presenta una interessante particolarità, oltre quella di averla noi cacciata in un'epoca molto più tarda di quella ricordata da Lampert, il solo che ne parli: cioè di non essere mai stata citata da Tognoli come facente parte della fauna modenese, e neppure da Senna per l'Italia.

In attesa di maggiori dati da cui potere trarre conclusioni più sicure, ricordiamo come le femmine presentino dimensioni maggiori dei maschi.

Pyrameis atalanta L.

1) Secondo Godart e Duponchel le farfalle volano tutto l'anno; secondo Depuiset, dalla fine di giugno all'ottobre; secondo Guide du jeune naturaliste, durante tutta la bella stagione; secondo Girard, una prima volta in maggio e poi a fine agosto e settembre; secondo Lampert, in primavera e poi in autunno.

La specie è considerata comunissima da Depuiset e Guide du jeune naturaliste; comune, da Girard e Senna.

Lampert afferma che lo svernamento avviene allo stadio di crisalide.

Le ali anteriori secondo Senna, misurano, dall'inserzione all'apice, mm. 27 - 30.

2) Tognoli considera l'adulto in volo dal marzo all'autunno avanzato.

Carruccio parla di certe annate in cui la specie è abbondante e di altre in cui essa è scarsa. Per Tognoli essa specie è comune, ma non mai abbondante.

Secondo Tognoli, lo svernamento può avvenire tanto allo stadio di crisalide che di insetto perfetto.

Lo stesso Tognoli ammette un'apertura alare di mm. 56-59 nei due sessi.

3) Abbiamo visto un esemplare in volo il 24 ottobre, giornata con tempo variabile, e catturato una sola femmina il 6 novembre.

Dimensioni delle ali anteriori, misurate dall'angolo basale all'apice, mm. 31,5. Apertura alare, mm. 69. Lunghezza del corpo, mm. 19,5.

4) I pareri dei diversi A.A. sulla data di scomparsa dell'adulto sono discordi, forse, anche, in dipendenza di quanto Carruccio ha detto relativamente alla abbondanza o scarsezza della specie a secondo delle annate; oltre, secondo noi, alla poca attenzione o scrupolosità con la quale certuni vanno alla caccia degli insetti. Comunque, vi sono A.A., compreso Tognoli, che riferiscono dati simili ai nostri.

D'accordo con Tognoli, anche noi supponiamo che la specie in questione sverni sia allo stadio di crisalide che di insetto perfetto: sempre che si verifichi in essa — il che verrà messo in luce, lo speriamo, durante la prossima primavera — quanto uno di noi

(Balli) ha potuto constatare e discutere in *Vanessa io*, specie molto affine a quella ora in esame.

Le dimensioni dell'unico individuo da noi cacciato superano di parecchio quelle ammesse da Senna e da Tognoli. Saranno condotte ulteriori ricerche per avere la conferma statistica di quanto sopra. In ogni modo, la ricerca delle cause per le quali gli individui studiati da noi presentano differenze di una certa entità rispetto a quelli d'altri A.A., non è possibile per le ragioni più volte ricordate relativamente al mancato accenno da parte loro delle condizioni di cattura delle farfalle.

Vanessa cardui L.

1) Godart e Duponchel affermano che le farfalle di questa specie volano in aprile e agosto; Depuiset, da luglio a settembre; Guide du jeune naturaliste, durante tutta l'estate; Girard, una prima volta in maggio e poi in luglio, agosto e settembre; Lampert, in primavera ed in estate.

Depuiset e Senna considerano la specie comunissima.

Secondo Lampert, alcune crisalidi svernano. Secondo Silvestri e Della Beffa sono le crisalidi che svernano.

Secondo Senna, le dimensioni delle ali anteriori, misurate dal loro angolo basale all'apice, raggiungono i mm. 27-31. In quanto all'apertura alare, Silvestri parla di mm. 56-65, Craveri di mm. 50-60 e Della Beffa di mm. 60.

2) Tognoli considera l'adulto presente da marzo a novembre, quantunque affermi d'averlo visto volare anche in febbraio.

Secondo Carruccio, la specie, in certe annate, è abbondantissima, in altre quasi assente. Secondo Tognoli, la stessa è ovunque abbondante dal piano al monte.

Carruccio accenna a catture di individui in così malo stato da lasciare supporre trattarsi di esemplari che hanno sopravvissuto alla stagione invernale. Secondo Tognoli la specie sverna allo stadio adulto.

Tognoli ammette aperture alari di mm. 56-58 nei maschi, e mm. 60-65 nelle femmine; quantunque egli citi un esemplare di mm. 42 catturato da altri in pianura, a breve distanza da Modena.

3) Nella giornata nuvolosa del 30 ottobre è stato visto volare l'unico esemplare da noi citato.

4) Solo Tognoli cita, come data ultima di volo dell'adulto, un'epoca che trova conferma in quella da noi emessa. Se le considerazioni a cui giungono gli altri A.A. non sono paragonabili alle

nostre, potrebbe dipendere, principalmente, da due cause: raccolta di dati errati e probabilità di avere cacciato, secondo l'opinione di Carruccio, in annate molto scarse.

Si è visto come alcuni ammettano che siano le crisalidi a svernare, ed altri l'adulto; Lampert suppone siano le une e le altre. Anche noi siamo del parere di Lampert, in quanto supponiamo — e la conferma l'avremo, all'inizio dell'anno prossimo con le nostre prime cacce — che *Pyrameis cardui* si comporti come la specie affine *Vanessa io*, della quale abbiamo già parlato trattando intorno a *Vanessa atalanta*.

RIASSUNTO

Gli A.A. hanno apportato un primo contributo alla fauna dei lepidotteri ropaloceri del modenese con lo studio sistematico-biologico delle specie a più tarda scomparsa rinvenute in una località (S. Eusebio, Comune di Castelvetro, a circa 110 m. s/m) ai piedi delle colline, nel corso dell'autunno (dal 18 ottobre al 19 novembre) dell'anno 1944. Le osservazioni sono accompagnate dai dati meteorologici e da quelli relativi alle condizioni d'ambiente in cui sono state effettuate le catture delle singole specie. Gli A.A., inoltre, hanno messo a confronto i risultati delle loro ricerche con quelli d'altri studiosi, rilevando come questi ultimi abbiano spesso appurato indicazioni poco attendibili e prive d'ogni dato riferibile alla cattura degli animali.

BIBLIOGRAFIA

- BALLI A. — *Ricerche biologiche su Vanessa io L.* « Atti Soc. dei Natur. e Matem. », Modena vol. LXXV, 1944.
- ID. — *Ricerche morfologiche e biologiche su Thais polyxena Schiff.* Ibidem.
- BARGAGLI P. — *Alcune escursioni entomologiche fatte in Italia nel 1872.* « Bull. della Soc. Entom. Ital. », A. IV, 1872.
- BOISDUVAL. — *Essai sur l'entomologie horticole.* Paris 1867.
- BREHM A. E. — *La vita degli animali.* Torino 1926.
- CARRUCCIO A. — *Contribuzione allo studio degl'insetti del modenese.* « Bull. Soc. Ent. Ital. », A. VI, 1874.
- COSTANTINI A. — *Lepidotteri raccolti nel 1908 da A. Costantini nel modenese.* « Boll. d. nat. », 1909.
- ID. — *Tre sere di caccia col lume all'alto Appennino modenese.* Ibidem.
- ID. — *Caccie ed osservazioni lepidotterologiche fatte nel 1907 a Montegibbio.* « Atti Soc. Natur. e Matem. », Modena 1911.
- CRAVERI C. — *Insetti nocivi all'agricoltura ed alla selvicoltura.* Milano 1915.
- DELLA BEFFA G. — *I parassiti animali delle piante coltivate od utili.* Milano 1931.
- DEPUISSET A. — *Les papillons. Iconographie et histoire naturelle des papillons d'Europe.* Paris 1877.
- FIORI A. — *Contribuzione allo studio dei lepidotteri del modenese e del reggiano.* « Boll. Soc. Ent. Ital. », A. XII, 1880.
- ID. — *Contribuzione allo studio dei lepidotteri del modenese e del reggiano* — Suppl. alla parte I — Ibidem, A. XIII, 1881.
- GIRARD M. — *Traité d'entomologie.* Paris 1873.
- GODART e DUPONCHEL M. — *Catalogue méthodique des lépidoptères d'Europe.* Paris 1844.
- GUÉNAUX G. — *Entomologie et parasitologie agricoles.* Paris 1910.
- GUIDE DU JEUNE NATURALISTE — *Les papillons de France.* Paris 1880.
- LAMPERT K. — *Die Grossschmetterlinge und Raupen Mitteleuropas.* 1907.
- LUCAS H. — *Papillons d'Europe.* Paris 1845.
- SENN A. — *Le farfalle.* Milano 1912.
- SILVESTRI F. — *Dispense di entomologia agraria.* Portici 1911.
- TOGNOLI L. — *Lepidotteri rinvenuti nel modenese e reggiano.* « Ann. Soc. Natur. », Modena, A. XII, 1878.
-

Donde provengono le comete?

SUNTO: *Riprendendo una questione già trattata in precedenti Note sul Nuovo Cimento, l'A. precisa che le comete a periodo conosciuto hanno "raggi equivalenti", tali che la loro origine va ricercata nelle lacune asteroidiche e nell'intorno dei pianeti meno densi.*

1) — Che tutte le comete siano originarie del nostro sistema solare è cosa, ormai, comunemente ammessa. È inoltre assai accreditata l'ipotesi del Kirkwood, secondo la quale molte di esse altro non sarebbero che asteroidi perturbati. Come è noto, gli asteroidi sono distribuiti sopra una zona che va da Marte a Giove, larga dunque più del doppio della distanza della terra dal Sole. In questa larga fascia, però, gli asteroidi non sono distribuiti uniformemente, ma vi si trovano raggruppati in varie famiglie, divise da vere e proprie *lacune*, corrispondenti a distanze nelle quali i periodi di rivoluzione dei pianetini che vi si trovassero sarebbero in rapporti semplici con quello di Giove. È deserta, ad esempio, la zona 3,3; ed un pianetino che ivi si trovasse avrebbe un periodo di rivoluzione esattamente metà di quello di Giove. Altre due lacune importanti si hanno: fra 2,45 e 2,55 l'una, fra 2,80 e 3,05 unità astronomiche l'altra.

Ora, come ho già osservato da tempo in alcune brevi Note comparse sul « Nuovo Cimento » (1), *per tutte le comete delle quali è conosciuto sicuramente il periodo si nota questo fatto: l'area racchiusa dalle loro orbite è tale che i raggi dei cerchi equivalenti (che chiameremo "raggi equivalenti",) sono, per la massima parte di esse, compresi tra i raggi equivalenti di Marte e di Giove, per le altre sono molto prossimi a quelli dei pianeti meno densi (Saturno e Nettuno).* Secondo questa regola sembrerebbe dunque esistere un qualche

(1) N. C. 21, p. 259, 1921; 22, p. 343, 1921; 4, p. 379, 1927; p. 503, 1935.

legame fra le comete, da una parte, e gli asteroidi e i pianeti meno densi dall'altra.

2) — Ho voluto ora vedere se non vi fosse qualche più precisa coincidenza con quelle lacune delle quali ho parlato sopra. Per far ciò ho preso in esame le 29 comete che il Bureau des Longitudes per il 1935 dà come sicuramente periodiche (4, dunque, in più delle 25 da me considerate nella mia prima nota del 1921) e le due comete alle quali ho accennato nelle due ultime delle note citate (di Gale e di Johnson); cioè, insomma, le comete per le quali oggi si conosce il periodo con sufficiente precisione: *trentuna in tutto*.

Per le 25 comete considerate nella mia prima nota e per quelle di Gale e di Johnson non faccio che trascrivere i raggi equivalenti già pubblicati nelle citate note. Per le quattro rimanenti (Neujmin II; Pons-Coggia-Winnecke-Forbes; Grigg-Skiellerup; Neujmin I) il Bureau des Longitudes del 1935 dà, rispettivamente, i seguenti valori:

distanza afelia	4,8403	17,653	4,9455	13,393
» perielia	1,33802	0,74494	0,89261	1,12686
eccentricità	0,56687	0,91902	0,69421	0,97289

Di qui si hanno per i raggi equivalenti, rispettivamente i valori: 2,80; 5,77; 2,48; 3,49.

Ottingo così la seguente tabellina dei raggi equivalenti disposti in ordine crescente.

COMETA	RAGGIO EQUIVALENTE	OSSERVAZIONI
1) Encke	1,69 Zona degli asteroidi
2) Brorsen	2,37	} . . . 3° Lacuna asteroidica
3) Grigg-Skiellerup	2,48	
4) Tempel	2,71	
5) Winnecke	2,75	} . . . 2° Lacuna asteroidica
6) Tempel-Swift	2,79	
7) Neujmin II)	2,80	
8) Biela	2,88	
9) Giacobini-Zinner	2,90	
10) Finlay	2,96	
11) Perrine	3,00	
12) D'Arrest	3,07	

(segue)

COMETA	RAGGIO EQUIVALENTE	OSSERVAZIONI
13) De Vico-Swift	3,19	} . . 1° Lacuna asteroidica
14) Borrelly	3,23	
15) Kopf	3,25	
16) Wolf	3,27	
17) Tempel 1898	3,35	
18) Schaumasse	3,38	
19) Holmes	3,45	
20) Faye	3,46	
21) Brooks	3,47	
22) Neujmin I)	3,49	
23) Tuttle	4,07	} . . Zona degli asteroidi
24) Gale	4,39	
25) Pons-Cog-Win-Forbes	5,77 (ρ_m di Giove = 5,20)
26) Brorsen	8,40	} . . (ρ_m di Saturno = 9,55)
27) Halley	9,06	
28) Pons-Brooks	9,39	
29) Westphal	9,74	
30) Olbers	10,50	
31) Johson (1935 a)	29,53 (ρ_m di Nettuno = 29,58)

Vi si osservano subito tre raggruppamenti notevoli: di questi uno di 5 comete, già notato da me precedentemente (2), con raggi equivalenti intorno al valore 9,5 (raggio equivalente di Saturno). Ma ben 10 comete hanno raggi equivalenti proprio intorno a quel numero 3,3 del quale abbiamo parlato prima, corrispondente, cioè, alla più importante lacuna asteroidica; mentre un altro notevole gruppo contiene 9 comete con raggi equivalenti intorno al valore 2,9, che corrisponde ad una seconda, importante lacuna asteroidica.

Anche un piccolo gruppo di 2 comete fa riscontro alla terza lacuna asteroidica (intorno al valore 2,5).

3) — Da questo punto di vista le comete periodiche a periodi ben conosciuti possono, dunque, dividersi in quattro gruppi principali, dei quali uno corrisponde a Saturno e gli altri tre corrispondono alle tre più importanti lacune asteroidiche. Poche rimanenti comete (tre) corrispondono a rimanenti punti della zona-

(2) N. C. 21 p. 259, 1921.

asteroidica; una cometa, poi, ha raggio equivalente abbastanza prossimo a quello di Giove; una, infine, ha raggio equivalente uguale, del tutto, a quello di Nettuno.

Secondo tale regola sembra dunque che: *l'origine delle comete vada ricercata nelle lacune asteroidiche e nell'intorno dei pianeti meno densi.*

Una sorprendente conferma di questa asserzione ci è data da uno " *stranissimo oggetto* ", celeste, scoperto abbastanza recentemente cioè il pianetino 1936 C. A. (3). Questo oggetto ha una eccentricità addirittura cometaria. Orbene, calcolando il suo raggio equivalente ρ_m dagli elementi della sua orbita ($a = 1,8766$; $e = 0,7651$) si trova il valore: $\rho_m = 1,51$, mentre per Marte è $\rho_m = 1,516$.

Questo corpo celeste, che sta incaminandosi a diventar cometa, sembra, dunque, per questa regola delle aree, provenir proprio, se non da Marte, dalle sue immediate vicinanze.

Ma quale giustificazione può avere una tal regola, che si presenta dapprima come puramente empirica? Non sembra che se ne possa dare una diversa da questa: « *le comete le cui orbite racchiudono aree pressochè uguali hanno avuto origine da uno stesso corpo celeste e si sono formate in condizioni iniziali pressochè identiche* ».

Che ciò sia possibile è dimostrato dalla Nota successiva del collega Prof. Agostinelli, dal titolo: *Sull'area delle orbite cometarie.*

Modena, Istituto di Fisica della R. Università.

(3) Vedi *Coelum*, Aprile 1936.

Sull'area delle orbite cometarie

Le considerazioni esposte dal Collega Prof. Pierucci nella nota precedente pare che si possano spiegare in base ai seguenti calcoli.

Sia P un pianeta la cui orbita ellittica intorno al Sole sia caratterizzata dai valori p ed e del parametro e dell'eccentricità. Essendo ancora c la costante delle aree, $M = m_o + m$ la somma della massa m_o del Sole ed m del pianeta, $h = -2E$ la costante dell'energia nel moto relativo del pianeta P intorno al Sole ed f la costante di attrazione universale, si ha notoriamente:

$$(1) \quad p = \frac{c^2}{fM} \quad , \quad (2) \quad 1 - e^2 = \frac{h c^2}{f^2 M^2}$$

Inoltre, chiamato r_1 il raggio vettore al perielio, v_1 la velocità del pianeta in quella posizione, a il semiasse maggiore dell'orbita ellittica, ed A l'area della stessa orbita, risulta

$$(3) \quad r_1 = a(1 - e) = \frac{p}{1 + e} \quad (4) \quad r_1 v_1 = c$$

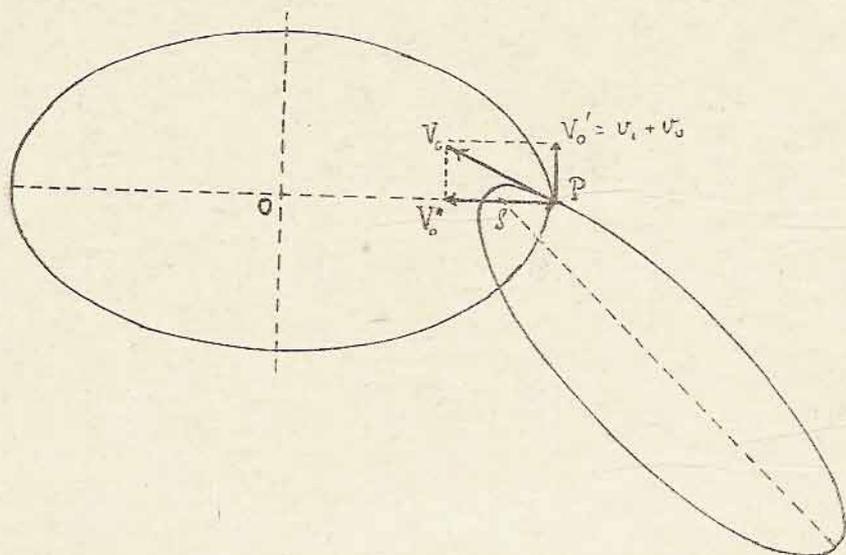
$$(5) \quad v_1^2 - \frac{2fM}{r_1} = 2E = -h \quad (6) \quad A = \frac{\pi p^2}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

Ciò premesso supponiamo che in un certo istante, che assumiamo iniziale, dal pianeta P , supposto costituito di materia fluida, venga, per cause interne, e per effetto della marea solare, proiettata verso il Sole una massa m' con velocità iniziale v_o , le cui componenti trasversale e radiale indichiamo rispettivamente con v_o' , v_o'' .

Per semplicità, e come è più probabile, riterremo che l'istante considerato cada in un passaggio del pianeta al perielio.

A partire da quell'istante la massa m' si allontanerà dal pianeta e risentirà quindi in preponderanza l'effetto dell'attrazione solare. Trascurando quindi l'azione perturbatrice del pianeta P , la massa

m' descriverà in prima approssimazione una nuova orbita ellittica intorno al Sole. D'altra parte, per m' molto piccola in confronto della massa del pianeta, questo continuerà sensibilmente a descrivere la stessa orbita ellittica precedente.



Per le ipotesi fatte la massa m' possiederà, all'istante iniziale, una velocità trasversa $V_o' = v_1 + v_o''$, e una velocità radiale $V_o'' = v_o''$, cioè una velocità assoluta

$$(7) \quad V_o = \sqrt{V_o'^2 + V_o''^2} = \sqrt{(v_1 + v_o'')^2 + v_o''^2}$$

ove v_o'' può avere anche segno contrario di v_1 .

Indicando con un apice gli elementi del moto della massa m' si avrà ora:

$$c' = r_1 V_o' = r_1 v_1 \frac{V_o'}{v_1}, \quad \text{cioè, (8) } c' = c \frac{V_o'}{v_1};$$

$$p' = \frac{c'^2}{fM'} = \frac{c^2}{fM} \cdot \frac{M}{M'} \cdot \frac{V_o'^2}{v_1^2}, \quad \text{ovvero (9) } p' = p \frac{M}{M'} \frac{V_o'^2}{v_1^2}$$

$$(M' = m_o + m')$$

Si avrà inoltre:

$$(10) \quad V_o'^2 - \frac{2fM'}{r_1} = 2E' = -h',$$

e confrontando colla (5) si deduce

$$h' = h + v_1'^2 - V_o'^2 - \frac{2f(m - m')}{r_1}.$$

Ne segue, ricordando le (1), (2), (3),

$$\begin{aligned} 1 - e'^2 &= \frac{h'c'^2}{f^2 M'^2} = \frac{c^2}{f^2 M'^2} \frac{V_o'^2}{v_1'^2} \left[h + v_1'^2 - V_o'^2 - \frac{2f(m - m')}{r_1} \right] = \\ &= \frac{V_o'^2}{v_1'^2} \frac{M^2}{M'^2} \left[1 - e^2 + \frac{c^2}{f^2 M^2} (v_1'^2 - V_o'^2) - \frac{2e^2}{fMr_1} \cdot \frac{m - m'}{M} \right] = \\ &= \frac{V_o'^2}{v_1'^2} \frac{M^2}{M'^2} \left[1 - e^2 + (1 + e)^2 \left(1 - \frac{V_o'^2}{v_1'^2} \right) - 2(1 + e) \frac{m - m'}{M} \right], \end{aligned}$$

ovvero

$$(11) \quad 1 - e'^2 = \frac{V_o'^2}{v_1'^2} \frac{M^2}{M'^2} (1 - e^2) \left[\frac{2}{1 - e} \frac{M'}{M} - \frac{1 + e}{1 - e} \frac{V_o'^2}{v_1'^2} \right].$$

Perchè la massa m' abbia un moto ellittico dovrà evidentemente risultare

$$(12) \quad \frac{V_o'^2}{v_1'^2} < \frac{2}{1 + e} \frac{M'}{M} < 2.$$

L'area A' dell'orbita descritta dal pianeta m' sarà pertanto

$$A' = \frac{\pi p'^2}{(1 - e'^2)^{3/2}} = \frac{\pi p^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \frac{\frac{M'}{M} \frac{V_o'}{v_1}}{\left[\frac{2}{1 - e} \frac{M'}{M} - \frac{1 + e}{1 - e} \frac{V_o'^2}{v_1'^2} \right]^{3/2}}.$$

e quindi

$$\frac{A'}{A} = \frac{\frac{M'}{M} \frac{V_o'}{v_1}}{\left[\frac{2}{1 - e} \frac{M'}{M} - \frac{1 + e}{1 - e} \frac{V_o'^2}{v_1'^2} \right]^{3/2}}.$$

Questa relazione mostra che può risultare $A' \leq A$, purchè si abbia

$$\frac{M'}{M} \frac{V_o'}{v_1} \leq \left[\frac{2}{1 - e} \frac{M'}{M} - \frac{1 + e}{1 - e} \frac{V_o'^2}{v_1'^2} \right]^{3/2}$$

ovvero:

$$(13) \quad F(\xi) = \xi^3 + \frac{1-e}{1+e} \left(\frac{M'}{M} \right)^{2/3} \xi - \left[\frac{2}{1+e} \frac{M'}{M} - \frac{V_o''^2}{v_1^2} \right] \leq 0$$

ove si è posto:

$$\xi = \left(\frac{V_o'}{v_1} \right)^{2/3}.$$

Cioè, avuto riguardo alla (12), dovrà risultare $F(\xi) \leq 0$ per

$$(14) \quad 0 \leq \xi < \left(\frac{2}{1+e} \frac{M'}{M} \right)^{1/3}.$$

Ora la $F(\xi)$ è sempre crescente per $\xi \geq 0$, e si ha, in virtù della (12), $F(0) < 0$ ed

$$F \left[\left(\frac{2}{1+e} \frac{M'}{M} \right)^{1/3} \right] = \left(\frac{2}{1+e} \right)^{1/3} \cdot \frac{1-e}{1+e} \frac{M'}{M} + \frac{V_o''^2}{v_1^2} > 0.$$

Dunque la $F(\xi) = 0$ ammette una e una sola radice ξ_0 compresa nell'intervallo (14), e per $0 < \xi \leq \xi_0$ è soddisfatta la (13).

Resta così spiegato come l'area A' dell'orbita della massa m' può essere uguale all'area dell'orbita del pianeta, mentre per la (11), le sua eccentricità e' può risultare prossima quanto si vuole all'unità, rendendo molto piccola la differenza

$$2 \frac{M'}{M} - (1+e) \frac{V_o''^2}{v_1^2}$$

cioè con $V_o''^2$ minore, ma molto prossimo al valore $\frac{2}{1+e} \frac{M'}{M} v_1^2$.

In tal modo la massa m' avrà un moto cometario.

In quanto alle comete di una lacuna asteroidica, le cui orbite hanno area pressochè uguale, si può ritenere che esse provengano dal disfacimento di uno stesso corpo celeste, i cui frammenti, proiettati verso il Sole, in condizioni pressochè uguali, hanno generato le dette comete. La quasi uguaglianza dalle aree orbitali può essere ancora spiegata col calcolo precedente.

Resti di castoro nelle stazioni eneolitiche ed enee del Modenese

Pochi avanzi di castoro (1), riferibili all'eneolitico ed all'età enea, sono noti, in gran parte da tempo, nell'Italia Settentrionale, provenienti dalle palafitte lombarde (2), da quella di Barche di Solferino (Mantova) (3), dal bacino torboso del Vallese (Verona) (4), dalle stazioni enee del Castellaccio (Imola) (5) e di Ugonzo

(1) Sembra che gli ultimi castori si siano estinti in Italia durante il sec. XVII nei selvosi acquitrini del delta padano. Secondo il Brehm (*La vita degli animali*, vol. IV, ediz. ital. 1931, p. 389), nel 1913 il castoro viveva ancora in Europa, localizzato in punti fra loro lontani ed in colonie non troppo numerose, in Germania lungo l'Elba, in Russia nelle paludi del Pripet e nel governo di Wilna, in Norvegia presso il fiordo di Stavanger, in Francia lungo il Rodano, a valle di Avignone, ed il suo affluente Gardon. Gli individui di tutte queste colonie non oltrepassavano in totale il migliaio.

(2) MARINONI C., *La terramara di Regona di Seniga*, ecc., in «Atti Soc. Ital di Sc. Nat.» XVII, fasc. 2, Milano 1874, prospetto alle pagg. 70-71.

(3) ZORZI F., *La palafitta di Barche di Solferino*, in B. P. I., IV N. S. - 1940, p. 58-60, fig. 9, n° 3. Barche di S diede un ramo mandibolare sin. privo dell'incisivo.

(4) FABIANI R., in Mem. Ist. Geologico R. Univ. di Padova, V. p. 82 — DE STEFANI S., *Del bacino torboso al Vallese*, ecc. Verona 1869, p. 11. Al Feniletto, località da cui si ebbero un'acchetta di cloromelanite e cocci preistorici, si scavarono molte ossa appartenenti ad un solo scheletro di castoro.

(5) STROBEL P., in Archivio Antropol. Etnol., IV-1874, p. 5 — STROBEL P., *Specie di Vertebrati di cui si trovano avanzi nelle mariere dell'Alta Italia*, in B. P. I., IX - 1883, pp. 7, 46 segg. — SCARABELLI G., *Stazione preistorica del monte del Castellaccio presso Imola*, Imola, 1887, p. 82 — DE STEFANO G., *I mammiferi preistorici dell'Imolese*, in Palaeontographia Italica XVII - 1911, pagg. 123-125, tav. XV, 5-8. Mandibola destra incompleta armata di soli due molari.

(Viadana) (1), dai fondi di capanne di Calerno (Reggio E.) (2). Di recente, studiando materiali in mio possesso e rivedendo le collezioni del Museo Civico di Modena, ho rinvenuto tre nuovi resti di castoro che, sebbene di interesse osteologico assai modesto, rivestono una certa importanza in quanto, oltre ad essere scaglionati nel tempo tra la più antica fase del nostro eneolitico (Fiorano) e l'età del bronzo tarda (Montale), sono i primi segnalati nel Modenese.

Fiorano Modenese (3)

Alle Fornaci Carani di Fiorano Modenese, nella Cava Est, scavi un secondo molare inferiore destro di castoro nel fondo di capanna n° 10 (strato archeol. IV) dello scavo 1942. Tutto il dente, lungo mm. 9,6 e largo 8,1, è ricoperto di patina nerolucida. Le pieghe dello smalto sono assai frastagliate. Il De Stefano (op. cit. p. 124) riporta, insieme alle misure del M² della mandibola del Castellaccio d'Imola (lung. 8,4, largh. 8), quelle dei M² inferiori destri di due crani del castoro attuale conservati nel Museo di Anatomia Comparata dell'Università di Bologna, rispettivamente: 7 e 7,6; 7,8 e 8,2; mentre il M² inf. destro di un cranio incompleto attuale del Museo di Anatomia Comparata dell'Università di Modena, da me misurato, è lungo 7,9 e largo 8,7. L'individuo a cui apparteneva il dente di Fiorano doveva essere adulto e probabilmente robusto.

(1) PARAZZI A., *La terramara di Cogonso nel Viadanese*, in B. P. I., VIII - 1882, p. 70 — STROBEL P., in B. P. I., IX - 1883, p. 7. Tibia di notevoli dimensioni. Lung. approssimativa (ricostruita) mm. 144.

(2) CHERICI G., in B. P. I., I - 1875, p. 109 — STROBEL P., *Gli avanzi di castoro scoperti in un fondo di capanna dell'età litica a Calerno presso l'Enza*, in B. P. I., I - 1875, pp. 110-115. — STROBEL P., in B. P. I., III - 1877, p. 45-46, 67 segg. — DE STEFANO, op. cit., p. 124 I due incisivi superiori attaccati a fram. delle ossa intermascellari e i due molari anteriori impiantati in un pezzo del mascellare inferiore sinistro. Resti appartenenti ad un solo individuo

(3) MALAVOLTI F., *Accetta enea a margini rialzati di Fiorano Modenese*, in Atti Soc. Tosc. Sc. Nat., Processi verbali. L - 1941, Pisa, pp. 109-115. MALAVOLTI F., *Una stazione ed un sepolcreto eneolitici alle Fornaci Carani di Fiorano Modenese. Ricerche preliminari eseguite dal 23 luglio 1938 al 30 settembre 1941*, in «Atti Soc. Natural. e Matem. di Modena», LXXV - 1944. Gli scavi eseguiti a Fiorano dopo il settembre 1941 sono ancora inediti.

Pescale (1)

Un altro dente di castoro rinvenni tra il materiale osteologico proveniente dagli scavi 1937-39 al Pescale, molto probabilmente un quarto molare inferiore destro, piuttosto consunto, dalle pieghe di smalto abbastanza frastagliate. Misura mm. 7,6 in lung., 8 in largh. Il M¹ del cranio dell'Università di Modena, dianzi citato, misura in lungh. 7,4 e in largh. 6,5.

Montale (2)

Nel luglio del corrente anno 1944, prendendo in esame materiali di scarto provenienti dall'importante stazione enea del Montale, mi venne fatto di scoprire un terzo dente di castoro confuso nel sottofondo di un armadio con residui industriali ed avanzi ossei. È un incisivo superiore di cui è conservata soltanto la parte prossimale, per una lunghezza di mm. 42, corrispondente a circa i due quinti di quella totale. Lo smalto della faccia anteriore ha perduto il caratteristico colore arancione divenendo grigiastro. La larghezza è di mm. 8.

Lo Strobel dà per il castoro di Calerno una larghezza di mm. 9 mentre un esemplare attuale, conservato presso l'Università di

(1) Com. Prignano sul Secchia, fraz. Pigneto, località Castellaro. Per questa stazione si vedano: CANESTRINI G., in *Annuario Soc. Natural. Modena*, II - 1867, pp. 189-194. — DE BUOI L., in «*Atti Soc. Natural. e Matem. di Modena*» LXVI - 1935, pp. 99-103. — MALAVOLTI F., *La stazione del Pescale. Scavi 1937-1939*, in «*Studi Etruschi*» XVI - 1942, pp. 439-463, tavv. XIX-XXIV. — MALAVOLTI F., in «*Atti Soc. Nat. Matem. Modena*» LXXI, 1940, p. 243 segg., figg. 1, 2.

(2) Comune di Castelnuovo Rangoni, fraz. Montale, sotto ed intorno la chiesa parrocchiale. BONI C., *Terramara di Montale*, in «*Il Panaro*», quotidiano modenese, del 13 ott. 1868, n° 237. — BONI C., *Terremare modenesi*, pp. 49, 53, 65, 77, 78 e tavv. II; VII, 1, 2, Modena 1870. — CRESPPELLANI A., *Marne modenesi*, ecc. Modena 1870, p. 18. — BONIZZI P., in *Annuario Soc. Nat. Modena*, VIII - 1872, p. 312. — BONIZZI P., in B. P. I. II - 1876, p. 29. — BONI C., *La terramara del Montale, scavo generale, Parte I*, 1881. Modena 1882; *Parte II*, 1884, Modena 1884, tavv. I-VI. — RELLINI U., in B. P. I. LIV - 1934, p. 83 segg.; *ibid.* N.S. II, 1938, p. 137. — PATRONI G., *La preistoria*, pp. 597 e 613. Milano, ediz. 1937. — LAVIOSA ZAMBOTTI P., *Carta archeol. staz. enee emiliane ad O. del f. Reno*, in «*Mem. Ist. Lombardo di Sc. e Lett.*» Classe di Lett., ecc. XXIV - 1939, fasc. VII, pp. 380-386.

Parma, misura mm. 6. Il cranio attuale, ripetutamente citato, dell'Università di Modena ha gli incisivi superiori larghi mm. 8,4.

I denti testè descritti denunciano chiaramente la presenza del castoro nel territorio tra i fiumi Secchia e Panaro durante i 15 secoli almeno (1) che separano l'eneolitico iniziale di Fiorano dal tardo bronzo del Montale (2) ma non permettono in nessun modo di stabilire se il grosso roditore abbia costruito i suoi *castelli acquatici* e le sue *dighe* nell'alta pianura boscosa, lungo le divagazioni e i rami morti dei fiumi e dei loro affluenti, oppure soltanto fra gli acquitrini delle bassure molto favorevoli al suo sviluppo.

Circa le dimensioni del castoro preistorico modenese, gli esigui resti e lo scarso materiale di confronto a disposizione sono appena sufficienti per lasciar supporre, analogamente a quanto aveva stabilito il De Stefano (op. cit. p. 124) per gli avanzi elvetici, veneti reggiani e romagnoli, che esse non separassero quelle dell'attuale vivente in buone condizioni ambientali: lungh. cm. 75-95 più cm. 30 di coda, peso fino ad oltre Kg. 30.

(1) L'ultimo tentativo in merito alla cronologia assoluta è dovuto a P. LAVIOSA ZAMBOTTI (*Le più antiche culture agricole europee. L'Italia, i Balcani e l'Europa Centrale durante il neo-eneolitico*, Milano 1943, p. 450 segg.).

(2) Durante il primo periodo del ferro il Castoro è documentato nei fondi di capanne di Bologna villanoviana (ZANNONI A., *Arcaiche abitazioni di Bologna*, Bologna 1907, pp. 54-55). In qualche tomba bolognese della fase Arnoaldi si notano denti di castoro, ornati di cerchielli incisi, infilati nell'arco di fibule bronzee (DUCATI P., *Storia di Bologna*, vol. I, Bologna 1928, p. 127).

Modena, Istituto di Zoologia e Anatomia Comparata dell'Università,
9 ottobre 1944

NOTA — Il presente lavoro era già ultimato quando individuai, fra gli ossami provenienti dai miei scavi effettuati al Pescale nel 1940, due nuovi avanzi di castoro. Il primo, nel quale credo di poter riconoscere un M^s sup. sin di dimensioni un po' inferiori al normale (lungh. 6,8), manca in vari punti dello smalto ed appartenne verosimilmente ad individuo non ancora adulto. Il secondo è un frammento unto e corrosivo di mandibola sinistra di grosso individuo, costituito dal condilo articolare al quale aderisce una piccola parte della branca ascendente. La cronologia dei nuovi pezzi, raccolti nello strato superficiale sconvolto (spessore cm. 24) e contenente reliquie di tempi diversi, non è precisabile ma può, dall'eneolitico finale, scendere fino all'età del ferro compresa.

F. M.

Sul preteso rinvenimento di *Megaceros euryceros*
Aldrovandi ad Arceto di Scandiano
(Reggio Emilia)

Nel museo dell'Istituto di Geologia dell'Università di Modena (1), giace da molti anni un resto scheletrico attribuito costantemente dagli Autori che lo ricordarono al *Megaceros euryceros Aldrovandi*. Nel corso di ricerche intorno alla stazione eneolitica di Chiozza (Scandiano) (2) ebbi recentemente occasione di esaminare l'oggetto in parola. Su di esso è incollato il cartellino: « *Cervus euryceros. Nelle ghiaie diluviali di Arceto presso Scandiano* ».

È una porzione di cranio costituita da un residuo del frontale sinistro e da quasi tutto il destro col peduncolo e la parte basale del corno. La rosa, assai grande e frastagliata, è conservata soltanto nella metà interna mentre la pertica, rugosa ed a sezione ovata, ed il primo ramo sono troncati subito sopra la loro biforcazione.

(1) SALA I, vetrina contenente avanzi di vertebrati.

(2) La stazione ed il sepolcreto eneolitici di Chiozza di Scandiano, la cui esistenza era indiziata da alcuni reperti esistenti nel Museo Preistorico Pigorini in Roma fin dal secolo passato, furono scoperti dal DE BUOI (*Tracce dell'uomo neolitico a Chiozza di Scandiano (Reggio Emilia)*), in « *Atti Soc. Natur. e Matem. di Modena* », LVII-1931; *Nuovi ritrovamenti nel sepolcreto neolitico di Chiozza di Scandiano*, in « *Atti Soc. Natur. e Matem. di Modena* », LXXI-1940, p. 194 segg.) e debbono la loro recente notorietà al rinvenimento di una statuetta di tipo paleolitico (De Buoi), agli scavi su larga scala intrapresi nel 1941 dalla LAVIOSA ZAMBOTTI (*Le più antiche culture agricole europee*, p. 75 segg., fig. F, tavv. VIII-XIII, Milano 1943) nonché alle pubblicazioni di vari studiosi (M. DEGANI, *Una statuetta femminile preistorica e un sepolcreto neolitico a Chiozza di Scandiano*, in « *Atti Soc. Natur. e Matem. di Modena* », p. 201 segg.; F. MALAVOLTI, *Ceramica acroma e dipinta tipo Ripoli nell'Emilia*, ivi, p. 246 e 248; P. GRAZIOSI, *La Venere di Chiozza*, in « *Studi Etruschi* », XVII-1943, p. 3 segg. e tav. I).

Una grande sbrecciatura interessa posteriormente tanto il residuo della pertica quanto la rosa ed il peduncolo. Su larghi tratti la superficie rugosa del corno è abrasa.

Subito giudicai molto dubbia l'attribuzione del cervo di Arceto al megacero mentre invece mi parvero estremamente evidenti le somiglianze con le reliquie del grosso cervo [*Cervus (elaphus) palmidactylocerus* De Stefano] che si raccolgono nelle stazioni preistoriche emiliane e con particolare frequenza in quelle di età enea, sia di facies appenninica che terramaricola. A trasformare in certezza i miei sospetti valsero i confronti che potei fare dapprima nell'ambito del Museo stesso poi al Museo Civico di Modena.

Un bel cranio quasi completo di *Megaceros euryceros* Aldrov. si conserva nella medesima sala (n.º 8 d'inventario) del Museo Geologico, proveniente, pare, dallo Scandianese (3). Esso appartiene ad un individuo adulto, anzi già vecchio. Le suture sono completamente obliterate e le superfici assai corrose per prolungata fluitazione. Qua e là, specialmente sulle corna, si osservano lesioni che sembrano dovute a qualche strumento moderno, ad esempio un aratro oppure una draga. Anche il più semplice esame comparativo mette in risalto le diversità esistenti fra il cervo di Arceto ed il megacero. Quest'ultimo ha le corna con peduncolo molto corto e grosso; pugnale dell'occhio situato immediatamente sopra la rosa e compreso dall'alto al basso; pertica, inizialmente a sezione rotonda, voltata quasi subito, con larga palmatura, molto sensibilmente in fuori. L'elafò var. *palmidactylocerus*, al contrario, ha peduncolo piuttosto allungato; pertica e pugnali molto rugosi ed a sezione ovata; palmatura sviluppata ma assai in alto, dopo il secondo ramo; dimensioni sempre notevolmente inferiori a quelle del megacero.

Lo stesso armadio che ospita lo pseudo megacero, contiene tre altri frammenti di corna cervine, in tutto identiche al nostro e provenienti, una della così detta *terramara* di Casinalbo (vassoio 17, n.º 13), gli altri due da quella di Gorzano. Tutti appartengono al *C. (elaphus) palmidactylocerus* De Stefano ma presentano dimensioni

(3) Dell'avanzo di Arceto e del cranio di euricero del Museo Geologico dice il PANTANELLI [I, p. 8 dell'estr.]: « Un bellissimo cranio di *Cervus* « *euryceros* posseduto dal Museo Geologico dell'Università di Modena, « alcuni denti dell'*elephas primigenius* provengono dalle ghiaie superfi- « ciali dello Scandianese ed un corno di *Cervus eurycerus* con frammento « di cranio è stato trovato ultimamente ad Arceto.... ».

un po' minori di quelle del residuo corneo di Arceto (4). Per togliere ogni dubbio in merito, ho misurato una serie di corna cervine del Museo Civico di Modena, riferibili alla var. *palmidactylocerus* De Stef., scelte fra gli esemplari meno frammentari e provenienti dagli abitati enei di Montale, Bazzano, Rastellino e da altri non specificati ma sempre del Modenese e della stessa età. Altra serie, appartenente alla stazione enea di facies appenninica del Monte Castellaccio (Imola), è riportata dal De Stefano (V. bibliograf. III, p. 88). Nella tabella annessa ho raccolto, insieme alle misure delle corna del megacero del Museo Geologico dell'Università di Modena, del cervo di Arceto, di due cervi attuali, le massime dimensioni delle corna della varietà cervina riconosciuta dal De Stefano, desunte dalle due serie, modenese e romagnola (5). Evidente risulta, dai dati esposti, l'appartenenza del cervo di Arceto ad un individuo adulto ma ancor giovane della varietà *palmidactylocerus* De Stef. del *C. elaphus* L. Le sue dimensioni sono di poco superiori a quelle medie delle serie prese in esame e rimangono notevolmente al di sotto, tanto di quelle massime della varietà quanto, ed a maggior ragione, di quelle del megacero, pur molto corroso, dianzi descritto.

Le dimensioni medie, dedotte dalle serie, sono le seguenti: diametro massimo della pertica subito sopra il primo ramo: 62 (da 24 esemplari); id. id. subito sopra la rosa: 72 (da 28 esemplari); circonferenza della rosa: 263 (da 25 esemplari).

Fin qui lo studio osteologico, che, se da un lato svaluta la determinazione specifica del cervo di Arceto e lo fa rientrare in una semplice varietà del *C. elaphus* L., d'altra parte nulla dice circa l'età del pezzo stesso. È noto infatti che il cervo comune, e così la varietà *palmidactylocerus* (6), visse durante il pleistocene e l'olo-

(4) N.° 1, da Casinalbo: Frontale destro con peduncolo, rosa, pugnale dell'occhio e piccolo residuo di pertica. Le misure relative, riportate secondo l'ordine in cui sono disposte nella tabella, sono: 49; 63,2; 252; 47; 34,5. Rosa e pertica molto rugose.

N.° 2, da Gorzano: corno caduco con rosa abrasa, lungo pugnale dell'occhio e pertica conservata fino alla seconda biforcazione. Poco rugoso. Misure: 54,6; 60; 235.

N.° 3, da Gorzano: corno caduco con rosa abrasa, piccolo pugnale dell'occhio e lungo fram. di pertica. Misure: 53,5; 66; 241.

(5) Le misure riportate non si riferiscono a corna integre, di cui peraltro non conosco alcun esemplare, ma sono strettamente limitate a quelle eseguibili sul corno frammentario di Arceto.

(6) De Stefano, op. cit., p. 95.

cene fino ai tempi protostorici. Per risolvere la questione cronologica soccorrono però, in modo del tutto convincente, i dati paletnologici.

Esiste ad Arceto, nota fin dal sec. XVIII (7), una vasta stazione di età enea tarda, del tipo così detto terramaricolo (8), poco o nulla studiata ma scavata a scopo agricolo da moltissimi anni (9). Di qui certamente venne al museo geologico il residuo in parola. Quanto alle *ghiaie diluviali* ricordate sul cartellino posso affermare che ad Arceto esse non affiorano mai ma sono dovunque ricoperte da un notevole manto di sedimenti giallastri olocenici. Si può tranquillamente escludere anche la provenienza da uno scavo perchè il nostro frammento di corno non reca tracce di rotolamento per subito trasporto idrico nè aderenze di argilla quaternaria rossastra ma bensì è ricoperto di una patina bruna lucida, comune sugli avanzi ossei delle stazioni preistoriche e porta, nelle cavità dei frontali, minute particelle di terriccio grigio-seuro.

Ma a rimuovere ogni residuo dubbio sulla contemporaneità della stazione enea di Arceto e del frammento di corno cervino, stanno le evidentissime tracce di lavoro umano intenzionale su di esso riscontrabili. La pertica fu troncata con la tecnica usuale dell'età del bronzo, tecnica che soltanto nel Museo Civico di Modena

(7) RICCI, *Corografia dei territori di Modena e Reggio*, 1788, p. 7. — G. B. VENTURI, *Storia di Scandiano*, 1840, p. 229. — G. DE MORTILLET, *Les terramares du Reggianois*, « Revue Archeol. », 1865, p. 18. — B. P. I. III-1877, p. 3, nota 3; IX-1883, p. 133 — P. LAVIOSA ZAMBOTTI, *Carta archeologica delle stazioni enee emiliane ad occidente del Reno*, in « Mem. Ist. Lombardo di Sc. e Lett. », XXIV, fasc. VII-1939, pp. 367-68.

(8) A distanza di circa 80 anni dall'inizio delle ricerche paletnologiche nell'Emilia il termine *terramara* va riportato al generico significato iniziale di *cumulo di terreno fertilizzante*. Va cioè svuotato di ogni significato cronologico e costruttivo. Gli abitati designati come *terremare* hanno costituzione molto varia e sono legati fra di loro soltanto dall'aspetto culturale che presentano i loro strati medi e profondi. È quindi giusto conservare il concetto di *facies terramaricola* con riferimento soprattutto alla ceramica ma non al tipo di abitazione.

(9) La stazione enea di Arceto è situata m. 300 ad O-NO del paese di tal nome, subito a Sud del cimitero, in un terreno di tal Galanti Giusto (1941). Si nota ivi una leggera elevazione (quota 75) costituita di terreno nerastro fra il quale raccolsi (novembre 1941) numerosi avanzi ceramici ed ossami di bruti. Non è possibile precisare, per ora almeno, l'ampiezza, certamente notevole, della stazione.

si può riconoscere su centinaia di pezzi, ma che si nota anche sul corno già citato di Casinalbo, nella stessa sala del Museo Geologico. Lo strato osseo esterno, più duro, venne intaccato con uno strumento metallico (l'accetta o il pugnale-coltello di bronzo) per indebolire la sezione, indi si spezzò con facilità il tessuto spugnoso.

Dal lato interno della rosa e, subito al di sopra, nella pertica, si notano tracce verdastre che mi fecero presumere il contatto *in situ* con qualche oggetto di bronzo o di rame. L'analisi chimica, da me eseguita nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Modena, ha confermato la supposizione.

Credo ormai ben dimostrata l'errata attribuzione a *Megaceros euryceros Aldrovandi* dell'avanzo cervino di Arceto che il Pantanelli [II, p. 348, nota 2], non dubitando della determinazione, dichiarava l'unico, tra molti del territorio emiliano, proveniente da località certa.

I caratteri morfologici e le dimensioni, molto diversi da quelli del megacero ed in tutto simili a quelli dei maggiori cervi di età enea, i residui di terriccio grigiastro ancora aderenti alle rugosità e la patina caratteristica, l'assenza di tracce di rotolamento, i tagli identici a quelli che si riscontrano su infinite corna ed ossa di età enea e infine le tracce di prolungato contatto con un oggetto in rame o bronzo, permettono di stabilire che il resto scheletrico di Arceto appartiene ad un individuo adulto di *Cervus (elaphus) palmidactylocerus De Stefano* e altro non è che un residuo di lavorazione abbandonato dall'uomo, durante la tarda età del bronzo, nella locale stazione oppure in altro vicino e coevo abitato tuttora sconosciuto (10).

Modena - Istituto di Zoologia ed Anatomia Comparata dell'Università.
Settembre 1944.

(10) Desidero ringraziare la Prof.ssa Eugenia Gallitelli Montanaro, Direttrice dell'Ist. di Geologia dell'Università di Modena, che mi concesse di prendere in esame il cervo di Arceto; il Prof. Celso Guareschi, Direttore dell'Ist. di Zoologia ed Anatomia Comparata dell'Università stessa nel cui Istituto lo studio venne eseguito; l'Ing. Lino Sandonnini, Direttore del Museo Civico di Modena, che permise la ricerca e la misurazione dei materiali di confronto; il Dr. Mario Bertolani, incaricato di Mineralogia, che favorì i saggi analitici.

T A B E L L A

Le misure sono in millimetri	Megaceros euryceros Aldrovandi del Museo Geologico di Modena	Cervus (elaphus) palmidactylo- cerus De Stefano di Arceto	Cervus (elaphus) palmidactylocerus De Stef.		Cervus (elaphus) Lineo, attuale (3)	
			Stazioni enee modenesi (1)	Castellaccio d' Imola (2)	I Cranio di grosso adulto	II Adulto normale imbalsamato
Diametro massimo della per- tica subito sopra il ramo oculare	67	?	71	75,7	46,5	35
Diametro massimo della per- tica subito sopra la rosa .	94	79	86	82	63	46
Circonferenza della rosa . .	303	275*	292	296	235	136
Diametro massimo del pe- duncolo subito sotto la rosa	85	51	53,7	—	44	—
Lunghezza del peduncolo. .	21	35,5	48	—	46	—

(1) Massime dimensioni desunte dalle misurazioni eseguite su 21 esemplari, 18 del Museo Civico, 3 del Museo Geologico di Modena.

(2) Massime dimensioni desunte dall' esame comparativo di alcune corna esistenti nel Museo Cominale di Imola (De Stefano, Op. cit., p. 88).

(3) Misure prese al Museo dell' Istituto di Zoologia dell' Università di Modena. Le corna del secondo individuo presentano la rosa molto ridotta.

* Misura ottenuta con approssimazione raddoppiando la lunghezza della semicirconferenza effettivamente misurabile.

BIBLIOGRAFIA

- I. — PANTANELLI D. - *Orografia pliocenica e quaternaria dei dintorni di Scandiano*, in « Atti Soc. Natural. di Modena. Rendic. Adunanze », anni 1886-87, vol. III, ser. III, Modena 1887, p. 8 dell'estr.
 - II. — PANTANELLI D. - *I terreni quaternari e recenti dell'Emilia*, estr. dalle « Mem. R. Accad. Sc. Lett. Arti di Modena », vol. IX, Ser. II, Sez. Scienze, p. 348, nota 2. Modena 1893.
 - III. — DE STEFANO G. - *I mammiferi preistorici dell'Imolese*, in « Palaeontographia Italica », XVII-1911, p. 83 segg., tavv. XI, 7, 8; XIV, 1-3; XV, 16. Pisa 1911.
 - IV. — DE BUOI L. - *Note geologiche del territorio scandianese*. Reggio E., 1930, p. 6.
 - V. — GRAZIOSI P. - *La Venere di Chiozza*, in « Studi Etruschi », XVII-1943, p. 14, nota 15.
-

Il quarzo della valle dell'Aveto

Del quarzo della valle dell'Aveto fa menzione il Rovereto (1), dedicando ad esso solamente un breve cenno di segnalazione. Nessuno però fin'ora, per quel che mi consta, eseguì su tale quarzo osservazioni goniometriche accurate. È per questo che il Professor Rodolico, in possesso di numerosi campioni di là provenienti, me ne affidò lo studio, non senza avermi largamente consigliato per l'inizio delle ricerche (2).

Si tratta di cristalli piccoli, misuranti al massimo 1 centimetro di lunghezza e aggirantisi in media sui 3-4 mm, ialini, perfettamente trasparenti e senza manifeste inclusioni. Esistono però sovente fratture interne, che donano bei colori iridati per fenomeni di rifrazione e riflessione totale. Sono impiantati su matrici quarzosa in druse perfettamente piane e ricche di cristalli. Tali druse mostrano anche alla base straterelli di arenaria, che ne è la roccia madre e filoncelli di calcite.

L'abito è nettamente e unicamente prismatico con allungamento a volte assai notevole. I singoli individui sono terminati da faccette ad una sola estremità.

Dei numerosi cristalli in mio possesso ne esaminai oltre 200 con la lente, 100 dei quali misurai al goniometro.

Tutti gli esemplari si sono rivelati semplici, destri o sinistri; ho potuto notare solamente alcuni aggruppamenti paralleli. In generale però i cristalli sono solamente giustapposti,



(1) ROVERETO G., *Liguria Geologica*, « Mem. Soc. Geol. Ital. », II, 474, 1939.

(2) Cessate le cause di guerra che ci tennero separati il Professor Rodolico m'inviò altri campioni e poté fornirmi ulteriori aiuti e utili consigli.

senza obbedire a particolari leggi di geminazione, malgrado, in qualche caso, possa sembrare, a una prima osservazione, essere presente la legge del Giappone. Frequenti i concrescimenti di cristallini sulle facce del prisma degli individui maggiori.

La scarsità di forme, notata a prima vista, è risultata tale anche al goniometro; infatti, oltre i soliti romboedri $\{100-1011\}$ (1), $\{22\bar{1}-01\bar{1}1\}$, alle bipyramidi $\{41\bar{2}-11\bar{2}1\}$, $\{4\bar{2}1-21\bar{1}1\}$ e al prisma $\{2\bar{1}\bar{1}-10\bar{1}0\}$ non sono comparsi che il romboedro diretto $\{944-130\bar{1}31\}$ (2 volte) e l'inverso $\{1919\bar{2}0-013\bar{1}36\}$ (1 volta).

Il romboedro diretto $\{100-1011\}$ è sempre ben sviluppato. Generalmente una faccia predomina come sviluppo sulle altre. Le immagini fornite sono per lo più buone, poche volte doppie o multiple per leggere striature e incurvature.

Il romboedro inverso $\{22\bar{1}-01\bar{1}1\}$ ha sviluppo molto vario; a volte raggiunge quello di $\{100\}$ col quale allora si può confondere se non si ricorre all'attacco con acido fluoridrico; a volte, ed è l'abito più comune, è a forma di faccetta triangolare alla base degli spigoli fra le facce del romboedro diretto. Tali faccette poi possono ridursi al punto di venire avvertite al goniometro dal solo piccolo bagliore. A volte assumono aspetto listiforme, generalmente assai sottile. Come per $\{100\}$, spesso anche in $\{22\bar{1}\}$ una faccia predomina sulle altre; ne deriva che, quando, sia una faccia di $\{100\}$, che una di $\{22\bar{1}\}$ contigue hanno sviluppo preponderante si originano distorsioni, in verità poco frequenti.

Il romboedro diretto $\{944-130\bar{1}31\}$, presente in due cristalli, ha faccette allungate, che donano una buona immagine, solo leggermente sfuocata. È stato segnalato anche, tra gli altri, da Aloisi per il quarzo di Carrara (2) e da Gallitelli per quello di Baveno (3). Al goniometro con la faccia di (100), la media dei valori angolari è risultata di $34^{\circ}25'$, scostantesi di $20'$ dal valore teorico di $34^{\circ}45'$.

(1) Riporto sia i simboli di Miller che quelli di Bravais per una più rapida comprensione nel caso di eventuali confronti.

(2) ALOISI P., *Il quarzo dei marmi di Carrara*. « Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. », Vol. XXV, Pisa, 1909.

(3) GALLITELLI P., *Il quarzo di Baveno*, « Per. di Mineral. », A. VI° N.° 2, Roma, 1935.

Il romboedro $\{19\ 19\ \overline{20}\ 0\ 13\ \overline{13}\ 6\}$ compare in un unico cristallo con una sola faccia molto espansa, leggermente opaca e incurvata, che produce però una discreta immagine. Anche questa forma è segnalata dall'Aloisi per il quarzo dei marmi di Carrara (1). Il valore angolare misurato con $\{22\overline{1}\}$ è risultato di $17^{\circ}42'$, con una differenza dal teorico $18^{\circ}15'$ di $33'$.

La bipiramide ditrigonale destra $\{41\overline{2}\ -11\overline{2}1\}$ ha anch'essa sviluppo vario. Si trova in 51 cristalli ed è per lo più rappresentata da faccette listiformi nello spigolo tra il romboedro diretto e il prisma; a volte però ha sviluppo maggiore e prende forma di losanga, superante spesso, per estensione, le facce di $\{22\overline{1}\ 01\overline{1}1\}$. Le immagini fornite sono sempre ottime. Sovente non si riscontrano nel cristallo che due o anche una sola faccia di tale forma.

La corrispondente sinistra $\{4\overline{2}1\ -2\overline{1}11\}$ presenta gli stessi caratteri e si trova in 39 esemplari.

Il prisma $\{2\overline{1}1\ -10\overline{1}0\}$ è sempre assai allungato, essendo nella direzione dell'asse ternario anche 6-7 volte più lungo che nella direzione ad esso perpendicolare. Le facce difficilmente sono piane e speculari per la presenza delle note striature trasversali. Non mancano però facce perfette con buone immagini.

Riporto qui di seguito le combinazioni dei 100 cristalli misurati al goniometro:

5 forme	$\{2\overline{1}1\}$, $\{100\}$, $\{22\overline{1}\}$, $\{41\overline{2}\}$, $\{94\overline{4}\}$	1 cristallo
	$\{10\overline{1}0\}$ $\{1011\}$ $\{01\overline{1}1\}$ $\{11\overline{2}1\}$ $\{13\ 0\ \overline{13}\ 1\}$	
5 forme	$\{2\overline{1}1\}$, $\{100\}$, $\{22\overline{1}\}$, $\{41\overline{2}\}$, $\{19\ 19\ 20\}$	»
	$\{0\ 13\ \overline{13}\ 6\}$	
4 forme	$\{2\overline{1}1\}$, $\{100\}$, $\{22\overline{1}\}$, $\{41\overline{2}\}$	49 cristalli
4 forme	$\{2\overline{1}1\}$, $\{100\}$, $\{22\overline{1}\}$, $\{4\overline{2}1\}$	39 »
	$\{2\overline{1}11\}$	
4 forme	$\{2\overline{1}1\}$, $\{100\}$, $\{22\overline{1}\}$, $\{94\overline{4}\}$	1 cristallo
3 forme	$\{2\overline{1}1\}$, $\{100\}$, $\{22\overline{1}\}$	9 cristalli

(1) ALOISI P., *Il quarzo dei marmi di Carrara*. « Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. », Vol. XXV, Pisa, 1909.

Otticamente il quarzo della valle dell'Aveto non presenta nulla di anomalo. Come già detto sopra, i cristalli sono unici, preponderanti quelli destri su quelli sinistri. Nessuna apertura delle isogire nella figura di interferenza di sezioni perpendicolari all'asse ottico, nessun accenno alla struttura a settori segnalata anche da D'Achiardi per i quarzi bipiramidati del Bolognese (1) e da Gallitelli per quelli del Modenese (2) e nemmeno struttura zonata come nei quarzi delle gessaie toscane (3).

L'indice di rifrazione, misurato con goniometro a riflessione, su prismi naturali paralleli all'asse ottico, nei cristalli n.° 13,19 e 22, per la linea C ha dato i seguenti valori:

$$\omega = 1,5418 \quad ; \quad \varepsilon = 1,5508$$

che non si discostano da quelli riportati dall'Hintze (4).

Data la somiglianza di giacitura e di ambiente risulta logico il raffronto dei quarzi della valle dell'Aveto con quelli dell'Appennino Modenese (Magrignana, Sasso de' Carli, M. Cimone), studiati dal Gallitelli (5).

Risulta però che il quarzo di Magrignana, in verità più frequente in cristalli sciolti inclusi nell'arenaria, che in vere e proprie cristallizzazioni, assai si discosta dal nostro sia per l'abito bipiramidato, che per lo scarso sviluppo del prisma $\{2\bar{1}\bar{1}\}$, per l'abbondanza delle forme, le numerose inclusioni e le diverse proprietà ottiche.

Anche il quarzo del Sasso de' Carli, più simile per giacitura e pur esso povero di forme, ha, differentemente dal nostro, aspetto bipiramidato con sviluppo ridottissimo o nullo del prisma verticale, è zeppo di inclusioni che lo rendono torbido e gode di diverse proprietà ottiche.

(1) D'ACHIARDI G., *Studio ottico di quarzi bipiramidati senza potere rotatorio*. « Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. », Vol. XVII, Pisa, 1899.

(2) GALLITELLI P., *Il quarzo del modenese*. « Per. di Mineral. », A. 1°, Roma, 1930.

(3) D'ACHIARDI G., *I quarzi delle gessaie toscane*. « Atti Soc. Tosc. Sc. Nat. », Memorie, Vol. XVII, Pisa, 1898.

(4) HINTZE C., *Handbuch der Mineralogie*. « Erst. B., Zwite Abth. », Leipzig, 1915.

(5) GALLITELLI P., *Il quarzo del modenese*. « Per. di Mineral. », A. 1°, Roma, 1930.

Il quarzo del Cimone invece, sia per la scarsità di forme, che per l'aspetto prismatico e la limpidezza, mostra un'evidente analogia con quello della valle dell'Aveto.

Istituto di Mineralogia della R. Università di Modena
Agosto 1944.

L'eclisse parziale di sole del 9 luglio 1945 ed una esperienza di ionizzazione atmosferica

Nell'eclisse del 1936, che appariva a Modena come parziale con grandezza 0,8 e durante il quale il sole si alzava sull'orizzonte già in parte eclissato, ebbi occasione di osservare (1) uno strano, enorme aumento di conducibilità atmosferica; e la curva del fenomeno mostrava una manifesta correlazione fra questo e l'eclisse. Un elettroscopio munito di un piatto metallico sverniciato si scaricava, nella fase di massimo dell'eclisse, in meno di 12 secondi, mentre prima e dopo l'eclisse il tempo di scarica era dell'ordine di grandezza di qualche migliaio di secondi.

Siccome non vi era esempio, nella ricca bibliografia sull'argomento, di variazioni così vistose, io attribuii il fenomeno al fatto che l'eclisse era avvenuto mentre il Sole si trovava all'orizzonte e quindi il cammino dei raggi solari attraverso l'atmosfera terrestre era massimo.

Nel 1939 un secondo eclisse parziale, e questa volta assai meno importante (grandezza: 0,1) avvenne col Sole in tramonto, cioè in condizioni equivalenti al primo per quanto concerneva il cammino dei raggi solari attraverso l'atmosfera terrestre. Anche allora (come è accennato nella citata nota) osservai un aumento di conducibilità, benchè enormemente minore di quello osservato nel 1936.

L'ultimo eclisse del 9 Luglio, che si è svolto dalle ore 15^h. 2^m alle ore 17^h. 30^m legali — cioè, effettivamente, dalle 14^h. 2^m alle 16^h. 30^m — e che appariva in Italia della grandezza di circa 5/10, si prestava bene a sperimentare il terzo caso, quello cioè, dell'eclisse col Sole alto sull'orizzonte.

Questa volta l'esperienza è stata fatta sulla torre dell'osservatorio dell'Università di Pisa, in condizioni sperimentali del tutto simili a quelle delle due prime esperienze.

(1) M. PIERUCCI, *Una strana osservazione in eclisse parziale di Sole*. «Nuovo Cimento», pp. 225-228, 1939.

Per tutta la durata dell'eclisse non fu trovata alcuna notevole variazione di conducibilità se si eccettui un brevissimo intervallo di tempo (di forse 30 secondi), durante il quale si ebbe un improvviso, enorme aumento di tale conducibilità. In tale intervallo di tempo, prossimo alla fase di massimo dell'eclisse, l'elettroscopio, caricato negativamente per contatto, si scaricò in un tempo così breve da non poter essere neppure misurato; mentre subito dopo, cercando di caricarlo positivamente per influenza, non vi riuscivo, tanto era rapido il richiudersi delle foglie.

Riepilogando possiamo concludere *per ora* che:

1°) Quando l'eclisse avviene col Sole all'orizzonte può aversi un notevole aumento della ionizzazione atmosferica.

2°) Quando l'eclisse avviene col Sole prossimo allo Zenith non si hanno, generalmente, sensibili variazioni; talvolta però, possono aversi come *folate* di forte ionizzazione; quasi come se qualche *sciame* di radiazione ionizzante giungesse fino al suolo.

Ciò incoraggia, a mio modesto avviso, a istituire ricerche sistematiche, più rigorose sull'argomento.

Modena, Istituto di Fisica della R. Università
Agosto 1945.

Inibizione spettroscopica anomala

SUNTO: È descritta una inibizione anomala, che si presenta in uno speciale arco elettrico a temperatura non molto elevata, e per la quale fra più elementi emette prevalentemente, o soltanto, quello a potenziale di ionizzazione maggiore; proprio come avviene nelle stelle delle più elevate classi spettroscopiche; per le quali una critica un po' accurata, che parta dalla teoria Saha - Eggert - Fermi della ionizzazione, non può non infirmare la persuasione finora avuta dagli astronomi che esse siano ad altissima temperatura.

1. — È noto come Tetrode (1), attraverso l'introduzione del valore h^3 per le celle dello spazio di fase, giungesse, sia pure con procedimento non esatto, all'esatta espressione dell'entropia:

$$1) \quad S = k n \left\{ \frac{3}{2} \log \Theta - \log \frac{n}{V} + \log \frac{(2 \pi m k)^{3/2} e^{5/2}}{h^3} \right\}$$

col solito significato dei simboli ed essendo e la base dei logaritmi naturali. A tale formula giunse poi Stern con un procedimento corretto, pur senza ricorrere alle nuove statistiche.

L'espressione 1) è valida per un gas monoatomico, purchè la temperatura sia tale che praticamente tutti gli atomi si trovino nello stato fondamentale e questo sia semplice; se invece esso è p volte degenerare si ha:

$$2) \quad S = k n \left\{ \frac{3}{2} \log \Theta - \log \frac{n}{V} + \log \frac{(2 \pi m k)^{3/2} p e^{5/2}}{h^3} \right\}$$

La teoria di Saha - Eggert (2), (3), perfezionata poi da Fermi (4) con la considerazione dei pesi statistici, permette di calcolare il grado di dissociazione per temperatura.

Considerando dapprima un vapore monoatomico i cui atomi A col crescere della temperatura spontaneamente si ionizzeranno tra-

(1) TETRODE, « Phys. Zeitschr. », p. 212, 1913.

(2) J. EGGERT, « Phys. Zeitschr. », XX, p. 570, 1919.

(3) M. N. SAHA, « Phil. Mag. ». XL, p. 477 e p. 809, 1920.

(4) E. FERMI, « Nuovo Cimento », pp. 153 - 158, 1924.

sformandosi in A^+ , e indicando con e gli elettroni, scriviamo a mo' di reazione chimica:



Osservando che l'energia interna del sistema è la somma dell'energia cinetica dei corpuscoli e dell'energia di ionizzazione degli atomi dissociati, mentre l'entropia del miscuglio sarà la somma delle entropie dei tre componenti, si trova per l'energia libera F del sistema:

$$4) \quad \left. \begin{aligned} F = & \frac{3}{2} n k \Theta (1+x) + n \omega x - n k \Theta (1+x) \\ & \log \frac{(2 \pi k \Theta)^{3/2} e^{5/2}}{h^3 n} + \\ & + n k \Theta \left\{ \log (1-x) - \log m_a^{3/2} p_a \right\} + n k \Theta \\ & \left\{ \log \frac{x^2}{1-x} - \log \frac{2 p_j m_e^{3/2}}{p_a} \right\}; \end{aligned} \right\}$$

e notando che, per l'equilibrio termodinamico, F deve essere minima, cioè $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, si ha finalmente:

$$5) \quad n \frac{x^2}{1-x} = \frac{2 p_j}{p_a} \frac{(2 \pi k m_e)^{3/2}}{h^3} \Theta^{3/2} e^{-\omega/k \Theta},$$

dove n è il numero di atomi inizialmente contenuti nell'unità di volume, $n x$ il numero degli atomi dissociati, m_a , m_j , m_e le masse degli atomi, degli ioni e degli elettroni, p_a , p_j , 2 i loro pesi statistici, ω l'energia di ionizzazione.

La 5) ci permette di calcolare il grado di dissociazione.

Diamo in nota (5) le ionizzazioni percentuali per alcuni elementi in qualche caso per noi particolarmente interessante. In linea

(5)

	He (p. di j. 24,47)	Ca (6,08)	Sr (5,67)	Ba (5,19)	Na (5,12)	Rb (4,16)	Cs (3,87)
--	------------------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------

$\Theta = 6000^\circ$

$p = 1 \text{ atm.}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$2,1 \cdot 10^{-1}$	$4,6 \cdot 10^{-1}$	$5,6 \cdot 10^{-1}$
$p = 10^{-6} \text{ atm.}$	$5 \cdot 10^{-3}$	← ionizzazione completa →					

$\Theta = 4000^\circ$

$p = 1 \text{ atm.}$	ionizzazione debolissima	$1 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-2}$
----------------------	--------------------------	-------------------	---------------------	-------------------	-------------------

generale l'ionizzazione cresce col crescere della temperatura e della rarefazione ed è tanto maggiore quanto più alto è il potenziale di ionizzazione.

2. — La teoria Saha-Fermi risponde bene alla questione di come possano differire tanto fra di loro gli spettri delle varie classi stellari (6), mentre oramai si ammette che tutte le stelle abbiano composizione chimica pressochè identica. Notiamo però, a questo proposito, come la scoperta, piuttosto recente, delle estreme rarefazioni delle stelle « giganti » (7) ponga sotto nuova luce questo problema; giacchè, se fino ad oggi gli astronomi ritenevano che le stelle delle prime classi dovessero riguardarsi come « caldissime », ora tale punto di vista deve essere sostanzialmente riveduto. Più che a grandi differenze di temperatura, le diversità degli spettri debbono ascrivarsi, insomma, alle straordinarie differenze delle densità stellari, le quali oscillano (per quanto si sa fin'ora) da $4 \cdot 10^3$ a $1,5 \cdot 10^{-7}$. (Del resto recenti osservazioni spettroscopiche sul Sole mostrano che le righe « enhanced » prevalgono piuttosto che nella bassa, nell'alta cromosfera, giacchè il gradiente di pressione è ivi più rapido del gradiente di temperatura).

Abbiamo riportato nella nota (5) due casi per noi particolarmente interessanti: nel primo siamo infatti in condizioni che racchiudono abbastanza bene quelle della massima parte delle stelle ($\Theta = 6000^\circ$; $P = 1$, $P = 10^{-6}$ atm); nel secondo ($\Theta = 4000^\circ$; $P = 1$ atm) siamo in condizioni prossime a quelle del comune arco elettrico nell'aria. Osservando il primo caso ci rendiamo conto perchè le stelle a grande rarefazione non presentino le righe degli atomi a basso potenziale di ionizzazione, giacchè questi sono già tutti depennati. Osservando il secondo si comprende perchè nell'arco elettrico — che possiamo riguardare emittente per sola temperatura (8) — prevalgano le righe dell'atomo neutro (« righe d'arco »); e come fra più elementi in presenza emetta più fortemente quello a più basso potenziale di ionizzazione.

(6) Secondo DRAPER le principali classi stellari sono indicate con le lettere: O, B, A, F, G, K, M, R, N, S. Nelle stelle della classe O la quasi totalità delle righe è prodotta da atomi ionizzati anche più volte. Nelle stelle delle prime classi prevale, poi, lo spettro dell'elio (« stelle a elio »).

(7) Densità di alcune stelle « giganti »: Betelgeuse: $6 \cdot 10^{-7}$; Antares: $3 \cdot 10^{-7}$; Mira Ceti: $1,5 \cdot 10^{-7}$ — (Sole: 1,4) — Densità di alcune stelle « nane »: « Satellite » di Sirio: $3 \cdot 10^4$; Stellina di van Maanen: $4 \cdot 10^5$.

(8) G. POLVANI, « N. C. », pp. 59-75, 1922.

Ma nell'arco le cose sono così vistose, che la stessa teoria di Saha - Fermi va integrata con altre ipotesi. Come appare infatti dalle esperienze di uno di noi (v. l. citati) spesso la presenza di tracce anche minime di un elemento a basso p di j . inibisce completamente lo spettro di un altro elemento a p . di j . appena più elevato; e la presenza di elementi ad alto p . di j . esalta in modo grandioso lo spettro degli elementi a basso p . Così per ottenere un intensissimo spettro del calcio occorre inviare nell'arco fra carboni, non polveri saline di questo elemento, ma addirittura polveri di un sale di magnesio o di ferro (9).

Per spiegare completamente questi fatti bisogna ricorrere (v. l. citati), oltre che alla teoria Saha - Fermi, anche all'ipotesi degli « urti di seconda specie » di Klein e Rosseland e a quella, già esposta da uno di noi (10), della « emissione sensibilizzata »; fenomeno simile a quello noto della « fluorescenza sensibilizzata » (visto per la prima volta da Cario (11) e studiato poi diffusamente da Franck e Cario) simile, ma da quello distinto; giacchè se nelle esperienze di fluorescenza sensibilizzata è la radiazione ricevuta da un atomo ad alto p . di j . che si scarica in parte su quello a basso, nella emissione sensibilizzata è l'energia posseduta da un atomo e non emessa come radiazione a provocare l'emissione diretta dell'altro atomo.

In alcuni casi neppure queste tre spiegazioni unite insieme rendono conto, almeno a prima vista, dei fatti sperimentali; è facile vedere, però, con una critica un po' accurata, che anche questi casi possono rientrare nella norma. Tali sono il caso delle scintille e quello dei gas rarefatti.

Nelle scintille, infatti, dove pure il gradiente di potenziale è notevole, le inibizioni (come ci siamo voluti accertare personalmente) hanno lo stesso comportamento che nell'arco; nei gas rarefatti, d'altronde, si hanno le celebri esperienze di Franck ed Hertz (12).

Osserviamo però, a questo proposito, che nelle scintille il cammino - medio - libero è piccolo. Per il vapore di sodio ad es. esso

(9) M. PIERUCCI, « N. C. », pp. 41-46, 1920. - Id. Id., « N. C. », p. 265, 1930. - Id. Id. e L. BARBANTI SILVA, « N. C. », p. 269, 1935. - Id. Id. e Id. Id., « N. C. », p. 265, 1938.

(10) M. PIERUCCI, L. BARBANTI SILVA, « N. C. », pp. 265-272, 1938.

(11) « Zs. f. Phys », 10, p. 185, 1922.

(12) Ver. d. D. « Phys. Ges. » p. 213, 1916 e « Phys. Zs. » pp. 409-430, 1916.

può ritenersi dell'ordine di 10^{-5} cm. (13). Se la caduta di potenziale è dell'ordine di 10^4 V/cm., il campo elettrico, da solo, non è sufficiente ad eccitare che pochissimi atomi, perchè, prima di raggiungere anche il potenziale di risonanza, l'elettrone ha già urtato in media con molti atomi.

Nelle scariche in gas rarefatti, d'altronde, cresce, è vero, il cammino-medio-libero col crescere della rarefazione; ma diminuisce pure (fino alla pressione critica) il gradiente elettrico. Sicchè, in conclusione, con la teoria Saha - Fermi e con le ipotesi degli urti di seconda specie e della emissione sensibilizzata si possono spiegare tutte le differenze di spettri e tutti quei fenomeni di inibizione spettroscopica che fin'ora si erano osservati nelle sorgenti spettroscopiche di laboratorio e nelle stelle.

Senonchè una esperienza assai strana, che ora andiamo a descrivere, è venuta a complicare le cose.

3. — Chiameremo di « *inibizione anomala* » quei fenomeni di inibizione che ora andiamo a descrivere; perchè essi si presentano opposti ai fenomeni fin'ora osservati in tutte le sorgenti di laboratorio; in modo che gli spettri che ne risultano sono del tutto simili a quelli delle stelle delle classi più elevate.

Questa inibizione anomala è stata da noi osservata in un arco speciale, del quale diamo qui brevemente la disposizione sperimentale.

L'elettrodo negativo è costituito da un disco piuttosto ampio (circa 12 cm. di diametro), ora di carbone, ora metallico, che ruota

(13) Facciamo $P = 1$ atm. Ricordando la relazione che dà il cammino-medio-libero: $l = 0,677 / \pi n \sigma^2$ (dove $\sigma = \text{diam.}^\circ \text{ atomico} = \text{diam.}^\circ \text{ mol.}^\circ$; n il numero delle molecole per cm.^3), ed essendo: $\sigma = 3,7 \cdot 10^{-8}$ cm. ed $n = \frac{6,02 \cdot 10^{23}}{2,24 \cdot 10^4} = 2,7 \cdot 10^{19}$, si ha, per temperatura ordinaria, $l = 5,6 \cdot 10^{-6}$. E per $\theta = 3000^\circ$ $l = 5,6 \cdot 10^{-5}$.

Si presenterebbe il problema di calcolare il cammino-medio-libero dello elettrone, problema, in questo caso, tutt'altro che facile; ma noi introduciamo qui una ipotesi di lavoro semplicistica; e precisamente finchè il numero degli elettroni non è tanto grande da doverli considerare come costituenti, essi stessi, un gas (il « gas elettronico » in equilibrio termodinamico con gli altri gas e vapori) finchè insomma gli elettroni si trovino come sommersi in un ambiente di gas o di vapori, noi supporremo che il loro cammino-medio-libero sia dello stesso ordine di grandezza di quello delle particelle costituenti il gas o il vapore.

a grande velocità (fino a 2400 giri per minuto primo). A raggiera, intorno al disco, sono posti numerosi carboni (fino a sedici) massicci, bene appuntiti, alquanto inclinati sulla direzione diametrale (14) e tutti collegati col polo positivo dell'elettromotore (15). L'arco ha l'aspetto di un anello circolare ampio e sottilissimo, che con la sua base negativa si imbastisce su tutta la circonferenza del disco rotante (circa 40 cm.); esso *ricorda singolarmente la corona solare, quale si presenta in tempo di eclisse*. Diamo, qui sotto, alcuni esempi dei risultati sperimentali (16).

1° ESEMPIO. — Arco con disco di carbone. Vi si inietta una soluzione, in acqua distillata, di solfato di sodio e di solfato di magnesio, nelle proporzioni, rispettivamente, di 10 %_o, 90 %_o; 20 %_o, 80 %_o; 80 %_o, 20 %_o; 90 %_o, 10 %_o.

Nei primi due casi la tripla b del magnesio ($2 p_1 - 2 S, 2 p_2 - 2 S, 2 p_3 - 2 S$) è più intensa perfino della coppia D del sodio ($1 S - 2 p_1, 1 S - 2 p_2$); nel terzo caso le due righe D e b (p. di ecc. rispettivamente 2 V. e oltre 5 V.) sono pressochè ugualmente intense (mentre il solfato di sodio è in quantità quadrupla di quello di magnesio); soltanto nel quarto caso D prevale su b . In tutti i quattro casi sono intense le righe delle serie accessorie del sodio, nonchè la H_{α} e la H_{β} dell'idrogeno (p di ecc. 12, 1 e 12, 6 V.).

2° ESEMPIO. — Ruota formata da due dischi uguali, giustapposti, di alluminio e di rame (p. di j. 5,96 e 7,7).

Appare intenso tutto lo spettro del rame (17), mentre dell'alluminio non si intravede, debolissima, che la coppia 3961,54 — 3944, 03 (18). Mancano del tutto i colonnati dell'ossido di alluminio.

(14) Ciò è necessario per non rompere i carboni durante l'operazione di adescamento dell'arco; adescamento che si ottiene ponendo prima il disco in rapida rotazione e avvicinandovi e riallontanandone subito dopo la punta di uno dei carboni

(15) Dinamo a 250 volta.

(16) Questo arco è particolarmente stabile e può rimanere acceso a lungo senza regolazione alcuna. I carboni periferici possono fungere anche da negativi (e la ruota da positivo); ma allora l'arco è meno stabile e, soprattutto, meno interessante dal punto di vista spettroscopico.

(17) Compagnono particolarmente intense le righe: 5782; 5700; 5220; 5218; 5153; 5105; 4331; 4480; 4063, 30; 4062, 94; 4022, 67 (p. di ecc.: 3,18; 3, 8; 6, 2; 6, 2; 6, 2; 3, 8; 6, 5; 6, 5; 6, 8; 6, 8; 6, 8).

(18) p. di ecc. 3, 2.

3° ESEMPIO. — Confronto fra due spettri ottenuti con un arco con ruota negativa formata da un solo disco di ferro e con un arco, in uguali condizioni sperimentali, ma con ruota composta di due dischi uguali di ferro e di alluminio (p. di j. 7, 83 ; 5, 96).

Non si osserva differenza alcuna; dunque il ferro inibisce completamente l'alluminio. Non vi è inibito, d'altronde, lo spettro dell'idrogeno (p. di j. 13, 53).

4. — Per interpretare le esperienze su riferite non pare che si possa fare astrazione dalla grande ampiezza della base negativa, la quale, *coeteris paribus*, è qui qualche centinaio di volte più estesa che negli archi comuni. Deve aversi quindi in seno all'arco una notevole immissione di elettroni; sì chè si potrà parlare addirittura di un « gas elettronico », in equilibrio termodinamico coi gas e coi vapori dell'arco.

Per semplicità di calcolo supponiamo poi che il numero degli elettroni sia dello stesso ordine di grandezza di quello degli atomi emittenti. Diamo infine al diametro atomico (il che per il nostro asserto è più sfavorevole assai) non il valore classico (dell'ordine di 10^{-13}) ma quello della lunghezza di onda associata De Broglie-Compton per l'elettrone in riposo ($4,8 \cdot 10^{-10}$) (19). Il cammino medio-libero del miscuglio diventa allora di un'ordine di grandezza qualche centinaio di volte maggiore che in assenza del gas elettronico; cioè diventa, nel nostro caso, di qualche decimo di millimetro. Se ora si pensi che già nell'arco ordinario vi sono in vicinanza degli elettrodi zone con forte gradiente di potenziale, e che in questo speciale arco tali zone debbono essere molto ampie (20), si deve concludere che qui siamo in condizioni favorevoli per avere una eccitazione prevalentemente elettrica.

Sicchè questi archi, che non sono certamente molto caldi, possono emettere uno spettro del tutto simile a quelli delle stelle appartenenti alle prime classi spettroscopiche.

(19) Per un significato, per così dire, effettivo della lunghezza d'onda associata di De Broglie vedi:

M. PIERUCCI, « N. C. » p. 690, 1934 e « N. C. » p. 291, 1942.

A. PIGNEDOLI, « N. C. » p. 36, 1942 e « Soc. Mat. e Nat. di Modena » p. 75, 1943.

(20) Ciò a cagione del grande numero degli elettrodi positivi e della grande estensione della base negativa.

Le quali stelle, d'altra parte, debbono riguardarsi, invece che caldissime, piuttosto come estremamente rarefatte.

Di modo chè, sia pure per due ragioni diverse, quelle stelle e questi archi danno spettri che sembrano dovuti ad altissime temperature; mentre invece in ambedue i casi dobbiamo concludere che ciò non avviene. E quello che dapprima sembrava complicare il quadro dei fenomeni finisce, in ultima analisi, per chiarirli ancora maggiormente.

Modena, Istituto di Fisica della R. Università.

Estensione di un teorema di Joukowski
al caso di un sistema olonomo, a vincoli indipendenti
dal tempo e con n gradi di libertà

Introduzione.

Nel presente lavoro, mi propongo di estendere, al moto di un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo e con n gradi di libertà, un teorema stabilito da JOUKOWSKI e relativo alla determinazione del potenziale della forza che deve sollecitare un punto materiale, mobile su una data superficie, affinchè la sua traiettoria appartenga ad una data famiglia di curve della superficie (*).

Trattato in generale il problema, sia nel caso che l'energia cinetica sia del tipo ortogonale, sia nel caso che essa sia del tipo più generale, vengo poi a considerare il caso particolare del moto di un punto riferito a coordinate ellittiche nello spazio, e ottengo, come caso particolare, il potenziale newtoniano.

§ 1. - Siano $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ i parametri lagrangiani che individuano in ogni istante la posizione del sistema e sia

$$(1) \quad T = \frac{1}{2} \sum_i^n a_{ii} \dot{q}_i^2$$

la sua forza viva, che supponiamo del tipo ortogonale; ci domandiamo il potenziale delle forze del sistema affinchè la sua traiettoria, nella varietà ad n dimensioni il cui ds^2 è definito dalla

$$ds^2 = 2T dt^2 = \sum_i^n a_{ii} dq_i^2,$$

sia, per esempio, una linea

$$(2) \quad q_2 = \text{cost}, q_3 = \text{cost}, \dots, q_n = \text{cost}.$$

(*) Vedi, per es.: WHITTAKER, *Analytical Dynamics*, Cambridge University Press, 1927, p. 109.

Le equazioni lagrangiane del moto sono

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

cioè

$$\frac{d}{dt} \left(a_{ii} \dot{q}_i \right) - \frac{1}{2} \sum_r^n \frac{\partial a_{rr}}{\partial q_i} \dot{q}_r^2 = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Se vogliamo che il sistema debba muoversi sulla linea $q_2 = q_3 = \dots = q_n = \text{cost}$, le equazioni debbono essere soddisfatte per $\dot{q}_2 = \dot{q}_3 = \dots = \dot{q}_n = 0$, e si ha:

$$(I) \quad \frac{d}{dt} \left(a_{11} \dot{q}_1 \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_1} \dot{q}_1^2 = \frac{\partial U}{\partial q_1},$$

$$(II) \quad - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_i} \dot{q}_1^2 = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Ora, essendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(a_{11} \dot{q}_1 \right) &= \sum_r^n \frac{\partial}{\partial q_r} \left(a_{11} \dot{q}_1 \right) \cdot \dot{q}_r = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(a_{11} \dot{q}_1 \right) \cdot \dot{q}_1 = \\ &= \frac{\partial a_{11}}{\partial q_1} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} a_{11} \frac{\partial \dot{q}_1^2}{\partial q_1}, \end{aligned}$$

la prima equazione diventa

$$(I') \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(a_{11} \dot{q}_1^2 \right) = \frac{\partial U}{\partial q_1}.$$

Questa equazione porge l'integrale

$$(3) \quad \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}_1^2 - U = f_1(q_2, q_3, \dots, q_n)$$

dove f_1 è una funzione arbitraria dei parametri lagrangiani, indipendente, però, da q_1 e dove il primo membro rappresenta l'energia totale del sistema nel suo movimento lungo la linea (2).

In virtù dell'integrale (3), la (II), fornisce

$$(4) \quad - \frac{\partial a_{11}}{\partial q_i} \frac{U + f_1}{a_{11}} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

che può essere scritta

$$(4') \quad \frac{\partial}{\partial q_i} (a_{11} U) = -f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_i} \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

e per l'integrabilità dev'essere

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial q_j} \left(f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_j} \right)$$

cioè

$$(5') \quad \frac{\partial f_1}{\partial q_j} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_i} = \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_j} \quad (i, j = 2, 3, \dots, n).$$

Quando queste condizioni sono soddisfatte dalla (4') si ricava

$$a_{11} U = - \int_{c_i}^{q_i} f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_i} dq_i + g_i(q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n)$$

da cui, derivando rispetto a q_j , avendo riguardo alla (5), si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_j} (a_{11} U) &= - \int_{c_i}^{q_i} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_i} \right) dq_i + \frac{\partial g_i}{\partial q_j} = \\ &= - \int_{c_i}^{q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_j} \right) dq_i + \frac{\partial g_i}{\partial q_j} \end{aligned}$$

cioè

$$-f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_j} = - \int_{c_i}^{q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_j} \right) dq_i + \frac{\partial g_i}{\partial q_j}$$

e quindi

$$\frac{\partial g_i}{\partial q_j} = - \left(f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_j} \right)_{q_i = c_i}$$

Abbiamo, quindi, particularizzando i risultati ottenuti

$$(6) \quad a_{11} U = - \int_{c_2}^{q_2} f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_2} dq_2 + g_2(q_1, q_3, \dots, q_n),$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial q_3} = - \left(f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_3} \right)_{q_2 = c_2}$$

da cui

$$g_2 = - \int_{c_3}^{q_3} \left(f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_3} \right)_{q_2 = c_2} dq_3 + g_2(q_1, q_4, \dots, q_n).$$

Sostituendo

$$a_{11} U = - \int_{c_2}^{q_2} f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_2} dq_2 - \int_{c_3}^{q_3} \left(f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_3} \right)_{q_2 = c_2} dq_3 + g_2(q_1, q_4, \dots, q_n).$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_4} (a_{11} U) = & - \int_{c_2}^{q_2} \frac{\partial}{\partial q_4} \left(f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_2} \right) dq_2 - \\ & - \int_{c_3}^{q_3} \frac{\partial}{\partial q_4} \left(f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_3} \right)_{q_2 = c_2} dq_3 + \frac{\partial g_2}{\partial q_4} \end{aligned}$$

da cui

$$g_3 = - \int_{c_4}^{q_4} \left(f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_4} \right)_{\substack{q_2 = c_2 \\ q_3 = c_3}} dq_4 + g_3(q_1, q_5, \dots, q_n)$$

e quindi

$$\begin{aligned} a_{11} U = & - \int_{c_2}^{q_2} f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_2} dq_2 - \int_{c_3}^{q_3} \left(f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_3} \right)_{q_2 = c_2} dq_3 - \\ & - \int_{c_4}^{q_4} \left(f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_4} \right)_{\substack{q_2 = c_2 \\ q_3 = c_3}} dq_4 + g_4. \end{aligned}$$

Così continuando, infine

$$\begin{aligned} (7) \quad a_{11} U = & - \int_{c_2}^{q_2} f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_2} dq_2 - \\ & - \sum_{i=2}^{n-1} \int_{c_{i+1}}^{q_{i+1}} \left(f_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial q_{i+1}} \right)_{\substack{q_2 = c_2 \\ q_i = c_i}} dq_{i+1} + g(q_1). \end{aligned}$$

§ 2. - Le condizioni di integrabilità sono soddisfatte se a_{11} è indipendente da q_1 ed f_1 è funzione di a_{11} .

In questo caso, posto $f_1 = -\frac{dF}{da_{11}}$ la (4') porge

$$\frac{\partial}{\partial q_i} (a_{11} U) = \frac{dF}{da_{11}} \cdot \frac{\partial a_{11}}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

da cui

$$(8) \quad U = \frac{F(a_{11}) + \Phi(q_1)}{a_{11}}.$$

Le condizioni di integrabilità sono ancora soddisfatte se

$$a_{11} = \varphi_1(q_1) \cdot \alpha_{11}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$$

ed è

$$f_1 = \psi_1(q_1) f(\alpha_{11})$$

con φ_1 e ψ_1 funzioni arbitrarie della sola q_1 ed f funzione arbitraria di α_{11} . In questo caso, la (4') diventa

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{\alpha_{11} U}{\psi_1(q_1)} \right] = -f(\alpha_{11}) \frac{\partial \alpha_{11}}{\partial q_i} \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

e, posto

$$f(\alpha_{11}) = \frac{dF}{d\alpha_{11}} \quad ; \quad F = \int f(\alpha_{11}) d\alpha_{11} \quad , \quad \text{si ricava}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{\alpha_{11} U}{\psi_1(q_1)} \right] = -\frac{\partial F}{\partial q_i} \quad , \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad ,$$

da cui

$$(9) \quad U = \frac{[G(q_1) - F] \psi_1}{\alpha_{11}}$$

ovvero

$$U = \frac{\psi_1(q_1)}{\alpha_{11}} [G(q_1) - \int f(\alpha_{11}) d\alpha_{11}].$$

§ 3. - Consideriamo, ora, come esempio, il caso di un punto materiale riferito a coordinate ellittiche nello spazio q_1, q_2, q_3 , ove

q_1, q_2, q_3 sono radici dell'equazione di 3° grado in λ

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} - 1 = 0.$$

Essendo $a > b > c$ e $q_3 < c^2 < q_2 < b^2 < q_1 < a^2$, le superfici $q_1 = \text{cost}$ sono iperboloidi a due falde; le superfici $q_2 = \text{cost}$ sono iperboloidi ad una falda e le $q_3 = \text{cost}$ sono ellissoidi. In questo caso, si hanno le

$$a_{11} = \frac{(q_1 - q_2)(q_1 - q_3)}{4(a^2 - q_1)(b^2 - q_1)(c^2 - q_1)}, \quad a_{22} = \frac{(q_2 - q_1)(q_2 - q_3)}{4(a^2 - q_2)(b^2 - q_2)(c^2 - q_2)},$$

(10)

$$a_{33} = \frac{(q_3 - q_1)(q_3 - q_2)}{4(a^2 - q_3)(b^2 - q_3)(c^2 - q_3)} \quad (*).$$

Essendo $a_{11} = \varphi_1(q_1) \alpha_{11}$ con $\varphi_1(q_1) = \frac{1}{4(a^2 - q_1)(b^2 - q_1)(c^2 - q_1)}$ ed $\alpha_{11} = (q_2 - q_1)(q_3 - q_1)$; ponendo, inoltre $f_1 = \psi_1(q_1) f(\alpha_{11})$ ed assoggettando il punto a forze di potenziale

$$(11) \quad U = \frac{\psi_1(q_1)}{(q_2 - q_1)(q_3 - q_1)} [g(q_1) - \int f(\alpha_{11}) d\alpha_{11}] .$$

esso si muoverà su di una linea $q_2 = \text{cost}$ $q_3 = \text{cost}$ e, durante il moto, l'energia totale del punto risulterà

$$H = \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}_1^2 - U = f_1; \quad \text{cioè}$$

$$\frac{1}{2} \varphi_1 \alpha_{11} \dot{q}_1^2 - U = \psi_1(q_1) f(\alpha_{11})$$

dove U ha il valore precedente e questa fornisce la velocità del punto mobile. In generale, il punto descrive una linea del quarto ordine (intersezione di due quadriche).

(*) Vedi APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, T. I, n.º 256, Paris, Gauthier-Villars, 1941.

Ricordiamo, ora, le formule di trasformazione delle coordinate ellittiche in coordinate cartesiane ortogonali (vedi Appell, loc. cit.)

$$x^2 = \frac{(a^2 - q_1)(a^2 - q_2)(a^2 - q_3)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}, \quad y^2 = \frac{(b^2 - q_1)(b^2 - q_2)(b^2 - q_3)}{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)},$$

(12)

$$z^2 = \frac{(c^2 - q_1)(c^2 - q_2)(c^2 - q_3)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}.$$

Se diamo a q_2 il valore limite c^2 ed a q_3 un valore costante $< c^2$, allora risulta $z = 0$, ed, eliminando q_1 fra le equazioni che forniscono x e y ,

$$(13) \quad \frac{x^2}{a^2 - q_3} + \frac{y^2}{b^2 - q_3} = 1$$

e la traiettoria è un'ellisse del piano xy di semiassi $\sqrt{a^2 - q_3}$ e $\sqrt{b^2 - q_3}$ e di distanza focale $F_1 F_2 = 2\sqrt{a^2 - b^2}$.

In questo caso si ha

$$(14) \quad U = \frac{\psi_1(q_1)}{(q_1 - c^2)(q_1 - q_3)} \left[g(q_1) - \int f(\alpha_{11}) d\alpha_{11} \right]$$

dove $\alpha_{11} = (c^2 - q_1)(q_3 - q_1)$.

Se diamo a q_2 il valore limite b^2 e a q_3 , al solito, un valore costante $< c^2$, otteniamo, $y = 0$, ed eliminando q_1 fra le relazioni che forniscono x e z ,

$$(15) \quad \frac{x^2}{a^2 - q_3} + \frac{z^2}{c^2 - q_3} = 1$$

e il punto mobile descrive un'ellisse del piano xz di semiassi $\sqrt{a^2 - q_3}$ e $\sqrt{c^2 - q_3}$ e di distanza focale $F_1 F_2 = 2\sqrt{a^2 - c^2}$.

Posto

$$(16) \quad v^2 = a^2 - q_1, \quad u^2 = a^2 - q_3, \quad \varepsilon^2 = a^2 - b^2 \quad \text{e} \quad q_2 = c^2,$$

nel caso di

$$q_3 < c^2 = q_2 < b^2 < q_1 < a^2, \quad (q_1 - q_3 = u^2 - v^2)$$

risulta

$$x^2 = \frac{u^2 v^2}{\varepsilon^2} \quad , \quad y^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} (u^2 - \varepsilon^2) (\varepsilon^2 - v^2)$$

e, allora, u e v sono le coordinate ellittiche nel piano xy .

In questo caso, il potenziale U diventa

$$(17) \quad \frac{\psi_1(v)}{(a^2 - c^2 - v^2)(u^2 - v^2)} [g(v) - \int f(\alpha_{11}) d\alpha_{11}]$$

ove $\alpha_{11} = (a^2 - c^2 - v^2)(u^2 - v^2)$.

Ricordiamo, ora che dette r_1 ed r_2 le distanze del punto materiale sulla traiettoria ellittica dai fuochi F_1 ed F_2 rispettivamente, si ha

$$r_1 = u + v \quad , \quad r_2 = u - v \quad , \quad r_1 r_2 = u^2 - v^2 .$$

Dando ad u un valore costante u_0 e ponendo $f = h$ (costante) si ha, per il potenziale U l'espressione

$$(18) \quad U = \frac{\psi_1(v) [g(v) - h(a^2 - c^2 - v^2)(u_0^2 - v^2)]}{(a^2 - c^2 - v^2)(u_0^2 - v^2)} .$$

Basta porre

$$g(v) = h(a^2 - c^2 - v^2)(u_0^2 - v^2) + u_0 - v \quad \text{e} \quad \psi_1(v) = \mu(a^2 - c^2 - v^2) ,$$

si ha

$$(19) \quad U = \frac{\mu}{u_0 + v} = \frac{\mu}{r_1}$$

cioè si ha, come caso particolarissimo, il *potenziale newtoniano*.

§ 4. - Prendiamo, ora, in considerazione il caso in cui la forza viva sia del tipo generale

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Si ha

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_1^n a_{ij} \dot{q}_j$$

e le equazioni del moto sono

$$(20) \quad \sum_j^n \frac{d}{dt} (a_{ij} \dot{q}_j) - \frac{1}{2} \sum_{rs}^n \frac{\partial a_{rs}}{\partial q_i} \dot{q}_r \dot{q}_s = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

e, se $\dot{q}_2 = \dot{q}_3 = \dots = \dot{q}_n = 0$, si ha

$$(21) \quad \frac{d}{dt} (a_{i1} \dot{q}_1) - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{i1}}{\partial q_i} \dot{q}_1^2 = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Per $i = 1$, si ha

$$(21') \quad \frac{d}{dt} (a_{11} \dot{q}_1) - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{11}}{\partial q_1} \dot{q}_1^2 = \frac{\partial U}{\partial q_1}$$

da cui, come nel caso della forza viva ortogonale, si deduce l'integrale

$$(22) \quad \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}_1^2 = U + f_1(q_2, q_3, \dots, q_n).$$

Per $i = 2, 3, \dots, n$, si ha, invece

$$(23) \quad \frac{\partial a_{i1}}{\partial q_i} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} a_{i1} \frac{\partial \dot{q}_1^2}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{i1}}{\partial q_i} \dot{q}_1^2 + \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

e, sostituendo in queste ultime il valore di \dot{q}_1^2 fornito dalla (22), si ottengono le equazioni

$$(24) \quad \frac{a_{i1}}{a_{i1}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(a_{i1}^2 \frac{U + f_1}{a_{i1}} \right) = f_1 \frac{\partial a_{i1}}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i} (a_{i1} U), \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Queste conducono alla stessa soluzione che si ha nel caso della forza viva del tipo ortogonale sia se $a_{i1} = 0$, ($i = 2, 3, \dots, n$), come pure facendo

$$a_{i1}^2 = \gamma_{i1} \frac{a_{i1}}{U + f_1}, \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

ove le γ_{i1} sono funzioni indipendenti da q_i .

Florula di Montegibbio e Pescaro (*)

Ad integrazione dei rilievi compiuti sulle associazioni boschive di Montegibbio e Pescaro, che furono oggetto di un recente lavoro (1943), ho esteso le osservazioni pure sulla composizione floristica di queste due località, raccogliendo o segnalando le specie ivi presenti, anche quelle appartenenti ad altre associazioni, per cui credo opportuno fornire in questo lavoro, l'elenco di tutte le specie segnalate, elenco che rappresenta la florula insediata sulle emersioni del miocene medio di detto settore, costituite da marne sabbiose ed arenarie, marne bianche e calcari arenacei.

Le specie elencate sono state raccolte o segnalate in varie località del settore di Montegibbio (Castagneto e zone acquitrinose del Rio delle Bagole, Buca del Tasso, Boschi delle Vignette, delle Sabbie e Ghiarine della Campagna, Pineta del Castello e Sorgente di Nani) e della zona del Pescaro (Pineta della Costa, roccie del Castellaro, Boschi di M. Branzola ed Acuto, di Secchia, della Fontana Formisana, della Fratta, di Benedetto delle Tane, del Campasso, della Costaccia, del Castellaro e calanchi di Rio Pescaro e R. Riccò), località che furono particolare oggetto delle mie ricerche.

I settori di Montegibbio e Pescaro, distano fra loro circa 3 Km. e sono posti entrambi ad un livello altimetrico che va da m. 150 a m. 400 circa s. m.

Il settore miocenico di Montegibbio su detto, ha inizio a sud della Cavriola e del Monticciolo e si inflette tornando su stesso verso sud ed in seguito verso ovest, assumendo grossolanamente l'aspetto di una striscia avente planimetricamente la forma di una «S» che va rapidamente affievolendosi fino a scomparire a punta fra le argille scagliose presso la casa del Rio di Vall' Urbana. La sua lunghezza si aggira sui 4 Km. con una larghezza, che considerata in linea d'aria, fra le alture di Casa Campagna e Casa del

(*) Dall'Istituto Botanico della R. Università di Modena, diretto dal prof. GIORGIO NEGODI — giugno 1945.

Pino da un lato, e quella delle Bagole e di Torano dall'altro, è di circa 1 Km.

Il settore del Pescaro invece ha la forma pressochè quadrangolare e va dal letto del fiume Secchia a poco oltre il M. S. Andrea e dalle falde NE del M. Branzola a poche centinaia di metri oltre Casa Assoni, località che distano fra loro 3 Km. circa.

Le zone boschive, calanchive, rocciose ed acquitrinose sulle quali ho compiute le ricerche, sono largamente interrotte da poderi a varie culture, che si alternano e si insinuano fra esse.

Data quindi la ristrettezza dei settori qui esaminati, stimo inutile fornire per ogni specie le indicazioni delle singole località in cui esse furono riscontrate, anche in quanto moltissime specie sono presenti nei vari punti di essi, per alcune più interessanti ho fatto alcune note a piè di pagina. Tuttavia nell'elenco ho indicato con [M.] le specie segnalate per Montegibbio e con [P.] quelle riscontrate nel settore del Pescaro.

Ogni specie è preceduta dalla sigla relativa al gruppo biologico a cui essa appartiene ed alla fine è ricavato lo spettro biologico della florula complessiva.

Ringrazio il prof. G. NEGODI per i consigli e per avermi facilitata la determinazione del materiale raccolto. Per questa mi sono servito pure del materiale di confronto conservato nell'Erbario dell'Istituto Botanico Modenese.

ELENCO DELLE SPECIE

- | | |
|---|--|
| H Ceterach officinarum Lam. et DC. [M.] [P.] | G. Equisetum ramosissimum Desf. [M.] [P.] |
| Ep. Polypodium vulgare L. [P.] | G. Equisetum ramosissimum Desf. v. variegatum (Schleich.) [P.] |
| H. Asplenium Adiantum-nigrum L. v. vulgare Guss. [M.] | P. Pinus silvestris L. [M.] [P.] |
| H Asplenium Ruta-muraria L. [M.] | Pn. Juniperus communis L. [M.] [P.] |
| H. Asplenium Trichomanes L. [M.] [P.] | H. Andropogon Gryllus L. [M.] [P.] |
| G. Pteris aquilina L. [M.] [P.] | H Andropogon Ischaemon L. [M.] |
| H. Botrychium Lunaria SW. [M.] | H. Sorghum halepense Pers. [P.] |
| G. Equisetum arvense L. [M.] [P.] | Th Setaria italica v. verticillata (P.B.) [M.] |
| G. Equisetum maximum Lam. [M.] [P.] | Th. Setaria viridis P.B. [M.] [P.] |
| G. Equisetum palustre L. [M.] [P.] | Th. Panicum Crux-Galli L. [M.] [P.] |
| | Th. Panicum sanguinale L. [M.] |

- H. *Anthoxanthum odoratum* L. [P.] G. *Colchicum autumnalis* L. [M.][P.]
H. *Phleum pratense* L. [M.] [P.] Th. *Brachypodium distachyum* P.B. [P.]
H. *Alopecurus pratensis* L. [P.] H. *Brachypodium pinnatum* P.B. [M.] [P.]
H. *Agrostis alba* L. [M.] [P.] H. *Lolium perenne* L. [P.]
H. *Calamagrostis arundinacea* Roth. v. *montana* Host. [M.] [P.] H. *Lolium perenne* L. v. *multiflorum* Lam. [P.]
H. *Calamagrostis Epigeios* Roth [M.] H. *Agropyrum repens* [M.]
H. *Arundo Phragmites* L. [P.] H. *Agropyrum repens* P.B. v. *glau- cum* (R. et S.) [M.] [P.]
H. *Holcus lanatus* L. [M.] [P.] H. *Agropyrum repens* P.B. v. *glau- cum* (R. et S.) [M.] [P.]
Th. *Aira capillaris* Host. [M.] Th. *Aegilops ovata* L. [P.]
H. *Trisetum flavescens* P.B. [P.] Th. *Hordeum murinum* L. [M.] [P.]
Th. *Avena sativa* L. v. *fatua* (L.) [P.] Th. *Cyperus fuscus* L. [P.]
H. *Arrhenatherum elatius* M. et K. [P.] H. *Scirpus Holoschoenus* L. [M.] [P.]
H. *Danthonia provincialis* DC [M.] G. *Scirpus Holoschoenus* L. v. *au- stralis* Kock. [M.]
G. *Cynodon Dactylon* Pers. [P.] H. *Scirpus lacuster* L. [M.]
H. *Sesleria caerulea* Ard. [M.] [P.] H. *Carex divulsa* Good. (Stoches?) [P.]
H. *Diplachne serotina* L.K. [M.] [P.] H. *Carex caespitosa* L. v. *elata* (All.) [P.]
H. *Molinia caerulea* Moench. [M] [P.] H. *Carex digitata* L. [M.]
Th. *Koeleria phleoides* Pers. [M] H. *Carex Halleriana* Asso [M.]
H. *Koeleria cristata* Pers. [P.] H. *Carex tomentosa* L. [P.]
H. *Melica uniflora* Retz. [P.] H. *Carex pendula* Huds. [M.] [P.]
H. *Briza media* L. [M.] [P.] H. *Carex nitida* Host. [P.]
H. *Dactylis glomerata* L. [M] [P.] G. *Carex glauca* Scop. [M.] [P.]
H. (G.) *Poa bulbosa* L. [M.] [P.] H. *Carax distans* L. [M.]
H. *Poa nemoralis* L. [M.] [P.] H. *Carex Oederi* Retz. [M.]
H. *Poa compressa* L. [M.] [P.] H. *Carex Pseudo-Cyperus* L. [M.]
H. *Poa pratensis* L. [M.] [P.] H. *Carex hirta* L. [M.]
H. *Poa trivialis* L. [P.] Hy. *Typha latifolia* [M.]
H. *Glyceria fluitans* R. Br. [M.] [P.] H. *Alisma Plantago-aquatica* L. [P.]
H. *Festuca ovina* v. *vulgaris* Koch. [P.] H. *Juncus inflexus* v. *pallidus* Hpe. [M] [P.]
Th. *Festuca ovina* v. *glauca* Lam. [P.] G. *Juncus conglomeratus* L. [M.]
H. *Festuca elatior* L. [M.] [P.] H. *Juncus articulatus* L. [M.] [P.] e v. *lamprocarpus* Hhrh. [M.] [P.]
H. *Festuca loliacea* Curt. [M.] (= F. *pratensis* × *Lolium perenne* Asch. et Gr.) H. *Juncus bulbosus* L. [M.]
H. *Bromus erectus* Huds. [M.] [P.] Th. *Juncus bufonius* L. [M.]
Th. *Bromus sterilis* L. [P.] Th. *Juncus Tenageja* Ehrh. [M.]
Th. (H.) *Bromus arvensis* L. [M.] [P.] H. *Luzula pilosa* v. *Forsteri* (DC.) [M.]
Th. *Bromus hordeaceus* L. v. *mol- lis* [P.] H. *Luzula campestris* DC. [M.]

- Th. Bromus squarrosus L. [P.]
 G. Erythronium Dens-canis L. [M.]
 G. Tulipa silvestris L. [M.]
 G. Lilium bulbiferum L. v. croceum
 Chaix. [P.]
 G. Ornithogalum umbellatum L.
 [M.] [P.]
 G. Ornithogalum narbonense L.
 [M.] [P.]
 G. Ornithogalum pyrenaicum L.
 [M.] [P.]
 G. Muscari comosum Mill. [M.] [P.]
 G. Muscari racemosum Mill. [M.]
 [P.]
 G. Allium vineale L. [M.]
 H. Anthericum Liliago L. [M.]
 G. Polygonatum officinale All. [M.]
 [P.]
 G. Asparagus tenuifolius Lam. [M.]
 Pn. Asparagus acutifolius L. [M.] [P.]
 Pn. Ruscus aculeatus L. [M.]
 G. Tamus communis L. [M.] [P.]
 G. Narcissus Poëticus L. [M.]
 G. Iris germanica L. [M.] [P.]
 G. Gladiolus communis L. [M.] [P.]
 G. Ophrys Bertolonii Moretti [M.]
 G. Ophrys Arachnites Reichard [M.]
 G. Ophrys myoides Jacq. [M.]
 G. Orchis Morio L. [M.] [P.]
 G. Orchis coriophora L. [M.]
 G. Orchis purpurea Huds. [M.]
 G. Orchis militaris L. [P.]
 G. Orchis simia Lam. [M.] [P.] (1)
 G. Orchis pyramidalis L. [M.]
 G. Gymnadenia conopsea R. Br.
 [M.] [P.]
 G. Platanthera bifolia Rich. [M.] [P.]
 G. Listera ovata R. Br. [M.] [P.]
 G. Limodorum abortivum SW. [M.]
 G. Cephalanthera rubra Rich. [M.]
 G. Cephalanthera ensifolia Rich.
 [M.]
 G. Cephalanthera pallens Rich. [M.]
 [P.]
 G. Epipactis latifolia All. [M.] [P.]
 P. Juglans regia L. [M.] [P.]
 Pn. Salix alba L. [M.] [P.]
 Pn. Salix alba v. vitellina L. [M.]
 Pn. Salix purpurea L. [M.] [P.]
 Pn. Salix nigricans Sm. [M.] [P.]
 P. Populus nigra L. [M.] [P.]
 P. Populus tremula L. [M.]
 P. Populus alba L. [M.]
 P. Populus alba X tremula L. [M.]
 [P.]
 P. Ostrya carpinifolia Scop. [M.]
 [P.]
 P. Corylus Avellana L. [M.] [P.]
 P. Quercus pedunculata Ehrh. [M.]
 P. Castanea sativa Mill. [M.] [P.]
 P. Ulmus campestris L. [M.] [P.]
 H. Urtica dioica L. [M.] [P.]
 H. Parietaria officinalis L. [M.]
 [P.]
 Pn. Hippophaë ramnoides L. [P.]
 [M.]
 Th. Thymelaea Passerina Lange [P.]
 Ep. Lorantus europaeus Jacq. [M.]
 [P.]
 Ep. Viscum album L. [P.]
 G. Aristolochia rotunda L. [M.] [P.]
 Th. Polygonum Convolvulus L. [P.]
 Th. Polygonum dumetorum L. [P.]
 Hy. Polygonum amphibium L. [M.]
 Th. Polygonum lapathifolium L. [M.]
 [P.]
 H. (Th) Polygonum aviculare L. [M.]
 H. (Th) Polygonum aviculare L. v.
 neglectum Bess. [M.] [P.]
 Th. Polygonum aviculare v. Bellardi
 (All.) [P.]
 H. Rumex crispus L. [M.] [P.]
 H. Rumex sanguineus v. conglome-
 ratus (Murr.) [M.] [P.]

(1) Nella Pineta della Costa (Pigneto) ho trovato la varietà a fiore bianco pure
 citata da Pirotta a Campogalliano e da Re sul Ventasso.

- H. *Rumex pulcher* L. [M.]
H. *Rumex obtusifolia* L. v. *agrestis*
Fr. [M.] [P.]
H. *Rumex acetosa* L. β *hirtulus*
Freyn [M.] [P.]
Th. *Atriplex hastatum* L. v. *patulum*
(L.) [P.]
Th. *Chenopodium polyspermum* L.
[P.]
Th. *Chenopodium polyspermum* v.
opulifolium Schrad. [P.]
Th. *Chenopodium Vulvaria* L. [P.]
Th. *Chenopodium murale* L. [P.]
Th. *Chenopodium album* L. [M.] [P.]
Th. *Polycnemum arvense* L. v. *maius*
B. Br. [P.]
Th. *Amarantus retroflexus* L. [P.]
Th. *Amarantus albus* L. [P.]
Th. *Portulaca oleracea* L. [P.]
Th.(H.) *Stellaria media* Cyr. [M.] [P.]
H. *Stellaria holostea* L. [M.] [P.]
Th. *Cerastium semidecandrum* v. *li-*
gusticum (Viv.) [M.]
H. *Cerastium triviale* LK. [M.]
Th. *Agrostemma Githago* L. [M.] [P.]
H. *Lychnis Flos-cuculi* L. [M.] [P.]
H. *Lychnis alba* Mill. [M.] [P.]
H. *Silene Cucubalus* Wib. [M.] [P.]
H. *Silene Cucubalus* Wib. v. *angu-*
stifolia Guss. [M.] [P.]
H. *Silene italica* Pers. [M.]
H. *Silene nutans* L. [M.] [P.]
H.(Th.) *Saponaria ocymoides* L. [M.]
[P.]
Th. *Saponaria Vaccaria* L. [P.]
Ch. *Tunica saxifraga* Scop. [M.] [P.]
Th. *Tunica prolifera* Scop. [M.]
Th (H.) *Dianthus Armeria* L. [M.]
H. *Dianthus Carthusianorum* L. [M.]
[P.]
H. *Hypericum quadrangulum* v.
acutum (Moench.) [P.]
G. *Hypericum perforatum* L. [M.]
[P.]
G. *Hypericum perforatum* v. *vero-*
nense Schrant. [P.]
H. *Hypericum montanum* L. [M.] [P.]
H. *Hypericum hirsutum* L. [M.] [P.]
Ch. *Helianthemum Fumana* Mill.
[M.]
Ch. *Helianthemum Chamaecistus*
Mill. [M.] [P.]
H. *Viola canina* L. [M.] [P.]
H. *Viola canina* v. *silvestris* (Lam.)
[M.] [P.]
H. *Viola hirta* v. *odorata* L. [M.] [P.]
Th.(H.) *Viola tricolor* v. *arvensis*
Mur. [M.] [P.]
Th.(H.) *Reseda lutea* L. [P.]
H. *Arabis Turrita* L. [M.]
H. *Arabis muralis* Bert. [P.]
Th. *Sisymbrium officinale* Scop. [M.]
[P.]
Th. *Alliaria officinalis* Andrzej. [M.]
Hy. *Nasturtium officinale* R. Br. [M.]
[P.]
Th. *Cardamine hirsuta* L. [M.] [P.]
Th. *Brassica arvensis* Scheele [P.]
Th.(H.) *Diploxys muralis* DC. [P.]
Th.(H.) *Diploxys muralis* v. *tenui-*
folia (DC.) [P.]
Th. *Rapistrum rugosum* All. [P.]
Th. *Alyssum calycinum* L. [P.]
Th. *Lepidium campestre* R. Br. [P.]
H. *Lepidium graminifolium* L. [P.]
Th. *Capsella Bursa-pastoris* Medic.
[P.]
Th. *Thlaspi perfoliatum* L. [P.]
Th. *Fumaria officinalis* L. [P.]
H. *Chelidonium maius* L. [P.]
Th. *Papaver Rhoeas* L. [P.]
Hy. *Ceratophyllum demersum* L.
Pl. *Clematis Vitalba* L. [M.] [P.]
H. *Thalictrum angustifolium* Jacq.
[M.]
H. *Thalictrum angustifolium* v. *fla-*
vum (L.) [M.]
G. *Anemone ranunculoides* L. [M.]

- H. *Anemone nemorosa* L. [M.]
 G. *Anemone Hepatica* L. [M.]
 G. *Ranunculus Ficaria* L. [M.]
 H. *Ranunculus bulbosus* L. [M.]
 H. *Ranunculus repens* L. [M.]
 H. *Ranunculus acer* L. [M.]
 H. *Ranunculus lanuginosus* L. [P.]
 H. *Ranunculus velutinus* Ten [M.]
 [P.]
 Th. *Ranunculus arvensis* L. [P.]
 G. *Eranthis hiemalis* Salisb. [M.]
 [P.]
 H. *Helleborus viridis* L. [M.] [P.]
 H. *Delphinium Consolida* L. [P.]
 Pn. *Berberis vulgaris* L. [M.]
 Ch. *Sedum sexangulare* v. *mite* Gilib.
 [M.] [P.]
 Ch. *Sedum sexangulare* v. *acre* L.
 [P.]
 Ch. *Sedum dasyphyllum* L. [P.]
 Pn. *Prunus spinosa* L. [M.] [P.]
 P. *Prunus Cerasus* L. [M.] [P.]
 G. *Spiraea Filipendula* L. [M.] [P.]
 G. *Geum urbanum* L. [M.] [P.]
 H. *Potentilla reptans* L. [M.] [P.]
 H. *Potentilla hirta* L. [M.] [P.]
 H. *Fragaria vesca* L. [M.] [P.]
 Pl. *Rubus fruticosus* L. v. *ulmifolius* Schott. [M.] [P.] (1)
 Pl. *Rubus fruticosus* v. *caesius* (L.)
 [M.] [P.]
 H. *Agrimonia Eupatoria* L. [M.] [P.]
 H. *Poterium sanguisorba* L. [M.] [P.]
 Pn. *Rosa arvensis* Huds. [M.]
 Pn. *Rosa gallica* L. [M.]
 Pn. *Rosa canina* v. *dumalis* (Bech.)
 [M.] [P.]
 Pn. *Rosa canina* v. *dumetorum*
 (Thuill.) [M.] [P.]
 Pn. *Crataegus Oxyacantha* v. *monogyna* Jacq. [M.] [P.]
- P. *Pirus communis* v. *piraster* L.
 [M.]
 P. *Pirus communis* v. *amygdaliformis* (Vill.) [M.] [P.]
 P. *Pirus Malus* L. [P.]
 P. *Pirus torminalis* Ehrh. [P.]
 P. *Pirus domestica* Ehrh. [M.] [P.]
 Pn. *Cytisus Laburnum* L. [M.] [P.]
 Pn. *Cytisus nigricans* L. [M.] [P.]
 Pn. *Cytisus sessilifolius* L. [M.] [P.]
 Pn. *Cytisus hirsutus* L. [P.]
 Pn. *Genista januensis* Viv. [M.]
 Pn. *Genista tinctoria* L. [M.] [P.]
 Pn. *Genista germanica* L. [M.] [P.]
 Pn. *Spartium junceum* L. [M.] [P.]
 Ch. *Ononis spinosa* L. [M.] [P.]
 Ch. *Ononis Masquillieri* Bertol. [M.]
 H. *Ononis pusilla* L. [M.]
 H. *Ononis Natrrix* L. *a maior* Boiss.
 H. (Th.) *Medicago lupulina* L. [M.]
 [P.]
 H. *Medicago sativa* L. [M.] [P.]
 H. *Medicago sativa* v. *falcata* L.
 [M.] [P.]
 Th. *Medicago orbicularis* All. [P.]
 Th. *Medicago minima* Gruf. [P.]
 Th. *Medicago hispida* v. *denticulata*
 (W.) [P.]
 H. *Medicago falcata* × *sativa*
 Focke [M.] [P.]
 Th. (H.) *Melilotus officinalis* Lam.
 [M.] [P.]
 H. *Melilotus alba* Dess. [P.]
 Th. (H.) *Trifolium arvense* L. [M.]
 Th. *Trifolium incarnatum* L. [P.]
 Th. *Trifolium angustifolium* L. [P.]
 H. *Trifolium ochroleucum* Huds.
 [M.] [P.]
 H. *Trifolium medium* L. [M.] [P.]
 H. *Trifolium rubens* L. [M.]
 H. *Trifolium fragiferum* L. [M.] [P.]

(1) Lungo il R. Burassa ho trovato anche la varietà a petali rossi.

- H. *Trifolium montanum* L. [M.] [P.] Th. *Vicia hybrida* L. [P.]
Th. *Trifolium patens* Schreb. [M.] Th. *Vicia lutea* L. v. *hirta* Balb.
Th. *Trifolium campestre* Schreb. [M.] [M.]
Th. (H.) *Anthyllis Vulneraria* L. [M.] Th. *Vicia grandiflora* Scop. [M.]
[P.] Th. *Vicia peregrina* L. [M.]
Ch. *Dorycnium pentaphyllum* Scop. Th. *Vicia sativa* L. [P.]
[M.] [P.] H. *Vicia Cracca* L. [M.]
Ch. *Dorycnium hirsutum* Ser. [M.] Th. (H.) *Vicia villosa* Roth. [M.]
[P.] H. *Lythrum salicaria* L. [M.] [P.]
H. *Lotus corniculatus* L. [M.] [P.] H. *Epilobium montanum* L. [P.]
H. *Lotus siliquosus* L. [M.] G. *Epilobium hirsutum* L. [M.] [P.]
Ch. *Astragalus glycyphyllos* L. [M.] Pl. *Hedera Helix* L. [M.] [P.]
[P.] G. *Eryngium campestre* L. [M.] [P.]
H. *Astragalus monspessulanus* L. G. *Eryngium amethystinum* L. [P.]
[M.] [P.] H. *Sanicula europaea* L. [M.]
Ch. *Astragalus Onobrychis* L. [M.] Th. *Bupleurum Odontites* L. [M.]
[P.] H. *Sison Amomum* L. [P.]
H. *Galega officinalis* L. [P.] H. *Pimpinella maior* Huds. [P.]
P. *Robinia Pseudo-Acacia* L. [M.] H. *Pimpinella saxifraga* L. [P.]
[P.] H. *Aegopodium Podagraria* L. [M.]
Pn. *Colutea arborescens* L. [P.] [P.]
Th. *Scorpiurus muricata* L. v. *sub-* H. *Cnidium silaifolium* Simonkai
villosa (L.) [P.] (Cn. *apioides* Spr.) [P.] (1)
H. *Coronilla varia* L. [M.] [P.] H. (Th.) *Foeniculum vulgare* Mill. v.
H. *Coronilla minima* L. [M.] [P.] *capillaceum* Gilib. [P.]
Pn. *Coronilla Emerus* L. [M.] [P.] H. *Peucedanum verticillare* DC.
H. *Onobrychis viciaefolia* Scop. v. [M.] [P.]
sativa Lam. [M.] [P.] H. *Ferula Ferulago* L. [M.] [P.]
Th. *Lathyrus Aphaca* L. [M.] [P.] H. *Peucedanum venetum* Koch. [P.]
Th. *Lathyrus silvester* L. [M.] [P.] H. *Peucedanum Cervaria* Lap. [M.]
G. *Lathyrus pratensis* L. [M.] [P.] [P.]
H. *Lathyrus niger* Bernh. [M.] Th. *Tordylium maximum* L. [P.]
G. *Lathyrus vernus* Bernh. [M.] Th. (H.) *Daucus Carota* L. [M.] [P.]
H. *Vicia sepium* L. [M.] [P.] Th. *Torilis arvensis* Lk. [P.]

(1) Questa specie, molto frequente nel territorio esaminato, è stata citata da Caruel per il Rondinajo (Prodr. p. 280); in seguito non si ebbero ulteriori citazioni relative alla sua diffusione nel modenese. Dall'esame del materiale conservato nell'Ist. Botanico di Modena, ho potuto constatare che gli esemplari trovati da Riva a Ranocchieto di Montese, e quelli di M. Evangelo presso Scandiano, citati nella Fl. del Mod. e Reg. di Gibelli e Pirota (1882, n. 601 del testo e dell'appendice) sotto il nome di *Selinum Carvifolia*, corrispondono invece a *Cnidium silaifolium* Simonkai.

A testimoniare la presenza di *Selinum Carvifolia* nel Modenese e Reggiano resta solo l'esemplare trovato da Fiori a Nirano.

- Th. *Torilis Anthriscus* Bernh. [P.]
Th. *Caucalis daucoides* L. [M.] [P.]
Th. *Scandix Pecten-Veneris* L. [P.]
H. *Chaerophyllum temulum* L. [P.]
H. *Danaa cornubiensis* Bur. [M.] [P.]
Th. *Coriandrum sativum* L. [M.] [P.]
H. *Oenanthe pimpinelloides* L. [M.] [P.]
Pn. *Cornus sanguinea* L. [M.] [P.]
P. *Cornus mas* L. [M.] [P.]
Pn. *Evonymus europaeus* L. [M.] [P.]
P. *Acer monspessulanum* L. [P.]
P. *Acer campestre* L. [M.] [P.]
Pn. *Acer Opalus* Mill. [P.]
Pn. *Rhus Cotinus* L. [M.]
P. *Rhus hirta* Sudw. [M.] [P.]
H. *Polygala vulgaris* L. [M.] [P.] (1)
Th. (H.) *Geranium molle* L. [P.]
Th. (H.) *Geranium rotundifolium* L. [P.]
Th. *Geranium columbinum* L. [M.]
H. *Geranium pyrenaicum* Burm. [P.]
H. *Geranium sanguineum* L. [P.]
H. *Geranium nodosum* L. [M.] [P.]
Th. *Erodium Ciconium* W. [P.]
Th. *Linum catharticum* L. [M.]
H. *Linum viscosum* L. [M.] [P.]
H. *Linum tenuifolium* L. [M.] [P.]
Th. *Althaea hirsuta* L. [P.]
H. *Althaea cannabina* L. [P.]
H. *Althaea cannabina* v. *narbonensis* Jacq. [P.]
Th. (H.) *Malva silvestris* L. [P.]
Th. *Malva rotundifolia* L. [P.]
Th. *Euphorbia Peplus* L. [M.]
H. *Euphorbia epithymoides* L. v. *verrucosa* Lam. [M.]
H. *Euphorbia dulcis* L. [M.] [P.]
Th. *Euphorbia helioscopia* L. [P.]
Th. *Euphorbia falcata* L. [P.]
G. *Euphorbia Cyparissias* L. [M.] [P.]
H. *Euphorbia Esula* L. [P.]
Hy. *Callitriche palustris* v. *verna* (L.) [M.]
Pn. *Buxus sempervirens* L. [P.]
G. *Monotropa Hypopythis* L. [P.]
Pn. *Erica arborea* L. [M.]
Pn. *Calluna vulgaris* Hull. [M.]
G. *Primula acaulis* Jacq. [P.]
G. *Cyclamen neapolitanus* L. [M.] [P.]
H. *Lysimachia punctata* L. [M.] [P.]
Ch. *Lysimachia nummularia* L. [P.]
Th. *Anagallis arvensis* L. [M.] [P.]
Pn. *Ligustrum vulgare* L. [M.] [P.]
P. *Fraxinus Ornus* L. [M.] [P.]
P. *Fraxinus excelsior* L. [M.]
H. *Vinca minor* L. [M.]
H. *Cynanchum Vincetoxicum* Pers. [M.] [P.]
Th. *Chlora perfoliata* L. [M. P.]
Th. *Erythraea Centaurium* Pers. [M.] [P.]
Th. (H.) *Cerintho minor* L. [P.]
H. *Onosma stellulatum* W. et K. [P.]
Th. (H.) *Echium vulgare* L. [P.]
H. *Lithospermum officinale* L. [M.]
H. (Ch.) *Lithospermum purpureo-caeruleum* L. [M.] [P.]
H. (Th.) *Myosotis palustris* Hill. v. *vulgaris* DC. [P.]
H. *Pulmonaria officinalis* L. [M.] [P.]
H. *Pulmonaria officinalis* v. *angustifolia* (L.) [M.]
H. *Anchusa italica* Retz. [P.]
H. *Symphytum officinale* L. [M.] [P.]
H. *Symphytum tuberosum* L. [M.] [P.]
Th. *Heliotropium europaeum* L. [P.]
Ch. *Convolvulus Cantabrica* L. [P.]
G. *Convolvulus arvensis* L. [M.] [P.]

(1) Sulle sabbie della Campagna ho pure trovato la varietà a petali bianchi.

- H Convolvulus sepium L. [M.] [P.] Th. Euphrasia officinalis L. [P.]
Th. Cuscuta Epythymum Murr. [M.] Th. Odontites lutea Rchb. [M.] [P.]
[P.] Th. Rhinanthus Crista-Galli L. v.
Pl. Solanum Dulcamara L. [P.] Alectorolophus Al. [M.]
Th. (H.) Solanum nigrum L. [M.] [P.] G Orobanche gracilis Sm. [M.] [P.]
Th. (H.) Verbascum Thapsus L. [P.] H. Ajuga reptans L. [M.] [P.] (1)
Th. (H.) Verbascum Blattaria L. [P.] H. Ajuga Chamaeptytis Schreb. [P.]
H. Verbascum pulverulentum Vill. H. Teucrium scordium L. [M.] [P.]
[P.] Ch. Teucrium Chamaedrys L. [M.] [P.]
H. Verbascum Lychnitis L. [P.] Ch. Teucrium montanum L. [M.] [P.]
Th. Linaria Elatine Mill. [P.] Th. Sideritis romana L. [P.]
H. Linaria vulgaris Mill. [P.] Ch. Glecoma hederacea L. [M.] [P.]
Th. Linaria minor Desf. [P.] H. Brunella vulgaris L. v. pinnati-
H Antirrhinum maius L. [P.] fida Pers. [M.] [P.]
G. Veronica Beccabunga L. [P.] H. Brunella vulgaris L. v. laciniata
Hy. Veronica Anagallis-aquatica L. L. [M.]
[P.] H. Brunella vulgaris L. δ grandi-
Th. Veronica Chamaedrys L. [M.] [P.] flora L. [P.]
Ch. Veronica officinalis L. [M.] H. Melittis Melissophyllum L. α ty-
H. Veronica spicata L. [M.] pica Rouy [M.] [P.]
Th. Veronica Persica Pourr. (Fr.) [P.] H. Melittis Melissophyllum L. β al-
H. Digitalis lutea L. [M.] [P.] bida Guss. [M.] [P.]
Th. Melampyrum cristatum L. [M.] H. Melittis Melissophyllum L. γ lon-
[P.] gestriata mihi [M.] [P.] (2)
Th. Melampyrum arvense L. [P.] Th. Galeopsis Ladanum L. [P.]
Th. Melampyrum nemorosum L. [P.] H. Lamium Galeobdolon Crantz. [P.]

(1) Nella Pineta del Castello ho pure trovato la varietà a flore albo.

(2) Nei colli di Sassuolo e Pigneto e nella zona gessifera di Scandiano e Borzano, oltre la varietà a corolla rosea, *typica* Rouy già sopra accennata, si trova la varietà con corolla bianca (v. *albida*) Gussone, entrambe già segnalate nella «Flora Analitica» di Adr. Fiori. Inoltre si trova una forma a corolla bianca o leggermente rosea col labbro inferiore avente all'antesi una lunga stria rossa che va sfumando e diffondendosi coll'avanzare della fioritura.

Bertoloni nella sua «Flora Italica» accenna alle seguenti forme di *Melittis Melissophyllum* distinte principalmente per la pigmentazione della corolla: «*Corolla nubilis ochroleuca, in anthesi carneo-violacea, pectore maculis saturatoribus picto, vel alba cum macula purpurea in pectore aut tota alba*».

Senz'altro qui si accenna anche alla forma che qui segnalo, senza però dire della forma della macchia.

Pure nella «Illustrierte Flora von Mittel-Europa» di Hegi, si accenna ad una forma con macchia rossa su sfondo bianco.

Collocati in vaso gli esemplari a labbro inferiore striato, raccolti nei colli di Sassuolo (Modena), si ebbero nelle fioriture autunnali dello stesso anno, fiori a labbro inferiore striato, e lo stesso carattere si è ripetuto sugli stessi ceppi anche nelle fioriture degli anni successivi, per cui si può affermare che questo carattere si mantiene sull'individuo. Distinguo questa forma con *Melittis Melissophyllum v. longe-striata*, mihi.

- H. *Lamium album* L. [M.]
H. *Stachys officinalis* Trevis. [M.] [P.]
G. *Stachys germanica* L. [P.]
G. *Stachys germanica* v. *italica* (Mill.) [P.]
G. *Stachys silvatica* L. [P.]
Th. *Stachys annua* L. [P.]
H. *Stachys recta* L. [M.] [P.]
H. *Salvia glutinosa* L. [M.] [P.]
H. *Salvia pratensis* L. [M.] [P.]
H. *Melissa officinalis* L. [M.] [P.]
H. *Satureja Calamintha* Scheele v. *silvatica* Briq. [P.]
H. *Satureja Calamintha* v. *Nepeta* Scheele [P.]
Ch. *Satureja vulgaris* Fritsch [M.] [P.]
Ch. *Thymus serpyllum* L. [M.] [P.]
H. (Th.) *Origanum vulgare* L. [M.] [P.] (1)
H. *Lycopus europaeus* L. [P.]
H. *Mentha longifolia* Huds. [M.] [P.]
G. *Mentha aquatica* L. [M.] [P.]
H. *Verbena officinalis* L. [M.] [P.]
H. *Globularia vulgaris* L. [M.] [P.]
H. *Plantago major* L. [M.] [P.] e subsp. *sinuata* Lam. (2)
H. *Plantago media* L. [M.] [P.]
G. *Plantago lanceolata* L. [M.] [P.]
H. *Galium verum* Scop. [M.] [P.]
H. *Galium verum* L. [M.] [P.]
H. *Galium purpureum* L. [M.] [P.]
H. *Galium Mollugo* L. [M.] [P.]
H. *Galium lucidum* (All.) [P.]
Th. *Galium parisiense* L. [P.]
Th. *Galium Aparine* L. [M.] [P.]
Ch. (H.) *Asperula cynanchica* L. [M.]
Pn. *Sambucus nigra* L. [M.]
Pn. *Viburnum Lantana* L. [M.] [P.]
Pn. *Lonicera Caprifolium* L. [M.] [P.]
Pn. *Lonicera Xylosteum* L. [M.] [P.]
Th. *Valerianella olitoria* Poll. [M.] [P.]
H. *Dipsacus fullonum* L. v. *silvester* (Huds.) [M.] [P.]
H. *Knautia pratensis* Szabò [M.] [P.]
H. *Knautia agrestis* Barb. [M.] (3)
G. *Scabiosa Columbaria* L. [M.] [P.]
H. *Bryonia dioica* Jacq. [P.]
Th. *Cucumis sativus* L. [P.]
H. *Jasone montana* L. [M.]
H. *Campanula Medium* L. [M.] [P.]
H. *Campanula glomerata* L. [M.] [P.]
H. *Campanula glomerata* L. v. *farinosa* Andrez. [M.]
H. *Campanula spicata* L. [M.]
H. *Campanula Rapunculus* L. [M.] [P.]
H. *Campanula persicifolia* L. [M.]
H. *Campanula bononiensis* L. [M.] [P.]
G. *Campanula Trachelium* L. [M.] [P.]
Th. *Specularia speculum* DC. f. [M.] [P.]
H. *Eupatorium cannabinum* L. [M.] [P.]
G. *Petasites officinalis* Moench. [M.] [P.]
G. *Tussilago Farfara* L. [M.] [P.]
Th. *Senecio vulgaris* L. [M.] [P.]

(1) Oltre ad esemplari a brattee e fusti fortemente colorati in rosso porporino, si riscontrano pure esemplari a brattee e fusti palidissimi, rosei quasi verdi ed anche forme intermedie. I caratteri brattee purpuree e brattee verdi si sono mantenuti anche in fioriture successive su ceppi trapiantati in vaso e controllati per alcuni anni di seguito. Tuttavia sul carattere ereditario di questi non posso riferire in quanto non ho potuto compiere delle ricerche sulla trasmissione di essi per seme nelle generazioni successive.

(2) Sul significato genetico delle razze giganti di *Pl. major* del modenese vedasi NEGODI (1941).

(3) Ho pure trovato sulle Sabbie della Campagna la varietà a fiore bianco.

- H. *Senecio Jacobaea* L. v. *erraticus* (Bert.) [M.] [P.]
H. *Senecio erucifolius* L. [P.]
H. *Bellis perennis* L. [M.] [P.]
H. *Aster Linosyris* Bernh. [M.]
H. *Solidago Virga-aurea* L. [M.] [P.]
Th. *Erigeron canadensis* L. [M.] [P.]
H. *Chrysanthemum Leucanthemum* L. [M.] [P.]
H. *Chrysanthemum corymbosum* L. v. *Achilleae* DC. [P.]
H. *Artemisia alba* Turra [P.]
H. *Artemisia vulgaris* L. [P.]
H. *Artemisia Abrotanum* L. [P.]
Th. (H.) *Anthemis arvensis* L. [P.]
Th. *Anthemis Cota* L. [P.]
H. *Anthemis tinctoria* L. [P.]
H. *Achillea Millefolium* L. [M.]
H. *Achillea nobilis* L. (z *typica*) [P.]
Th. *Filago germanica* L. [P.]
Th. *Filago minima* [M.]
Ch. *Helichrysum angustifolium* DC (italicum G. Don) [P.]
H. *Inula salicina* L. [M.] [P.]
H. *Inula Conyza* DC. [M.] [P.]
Ch. *Inula viscosa* All. [M.] [P.]
H. *Pulicaria dysentherica* Bernh. [M.] [P.]
Th. *Bidens tripartita* L. [P.]
Th. *Xanthium strumarium* L. [P.]
H. *Echinops sphaerocephalus* L. [P.]
H. *Carlina vulgaris* L. [M.] [P.]
Th. *Xeranthemum cilindraceum* S. et S. [M.]
H. *Serratula tinctoria* L. [M.] [P.]
G. *Centaurea Jacea* L. [M.] [P.]
G. *Centaurea Jacea* v. *amara* L. [M.] [P.]
G. *Centaurea Jacea* v. *vochinensis* Bern. [P.]
G. *Centaurea Jacea* v. *dubia* (Suter.) [M.] [P.]
H. *Centaurea scabiosa* L. [M.] [P.]
Th. *Centaurea solstitialis* L. [P.]
H. (Th) *Carthamus lanatus* L. [P.]
H. *Carduus nutans* L. [P.]
H. *Cirsium lanceolatum* Scop [M.] [P.]
H. *Cirsium eriophorum* Scop. [M.]
H. *Cirsium arvense* Scop. [M.] [P.]
H. *Cirsium acaule* Scop. [P.]
H. *Cichorium Intybus* L. [M.] [P.]
Th. *Lapsana communis* L. [P.]
H. *Leontodon Pyrenaicus* Gouan [M.]
H. *Leontodon hispidus* L. [M.] [P.]
H. *Leontodon hastilis* L. v. *glabratus* Koch. [M.] [P.]
H. *Leontodon Villarsii* Lois [M.]
G. *Picris hieracioides* L. [M.] [P.]
Th. *Helminthia echioides* Gaertn. [M.] [P.]
H. *Tragopogon pratensis* L. [M.] [P.]
Th. (H.) *Tragopogon porrifolius* L. [P.]
Th. (H.) *Scorzonera laciniata* L. [P.]
H. *Taraxacum officinale* Web. [M.] [P.]
H. *Taraxacum officinale* v. *tenuifolium* (Koch.) [M.]
G. *Chondrilla juncea* L. [P.]
Th. *Sonchus oleraceus* L. [M.] [P.]
Th. *Sonchus arvensis* L. [M.] [P.]
Th. (H) *Lactuca scariola* L. [M.] [P.]
Th. *Lactuca virosa* L. [M.]
Th. *Crepis foetida* L. [P.]
H. *Crepis setosa* Hall. f. [P.]
Th. *Crepis pulchra* L. [M.] [P.]
Ch. (H) *Hieracium Pilosella* L. [M.]
H. *Hieracium Auricula* L. [M.]
H. *Hieracium florentinum* All. [M.]
H. *Hieracium praealtum* (Vill.) [M.]
H. *Hieracium murorum* L. [M.]
H. *Hieracium sabaudum* L. v. *bo-reale* Fr. [M.]
H. *Hieracium racemosum* W. et K. v. *italicum* Fr. [M.]
H. *Hieracium villosum* Fr. [M.]

Lo spettro biologico di questo popolamento vegetale può, in base al prospetto sopra riportato, essere stabilito come segue:

Forme biologiche	Numero delle specie	% di presenza
Ep	3	0,5
P	24	4,1
Pn	37	6,4
Pl	5	0,8
Ch	24	4,0
H	258	44,8
G	79	13,7
Th	140	24,3
Hy	6	1,0

BIBLIOGRAFIA

- FIORI A., *Nuova flora analitica d'Italia*. Firenze 1923-1929.
- GIBELLI G. e PIROTTA R., *Flora del Modenese e Reggiano*. « Atti Soc. dei Natur. di Modena », ser. III, vol. I, pp. 29-216, 1882.
- Id. *Primo supplemento alla flora del Modenese e Reggiano*, « Ibidem », ser. III, vol. III, pp. 1-30, 1884.
- MORI A., *Contribuzione alla Flora del Modenese e Reggiano*. « Ibid. » ser. III, vol. V, pp. 113-126, 1886.
- NEGODI G., *Giganti stabili non tetraploidi in Plantago major L.* « Nuovo Giorn. Bot. Ital. », n. ser. vol. XLVIII, 1941.
- Id. *Studi sulla vegetazione dell'Appennino emiliano e della pianura adiacente. Mem. I*, « Annali di Bot. », vol. XXII, fasc. 2, 1941; *Mem. II*, « Annali di Bot. », vol. XXII, fasc. II, 1941; *Mem. III*, « Archivio Bot. », vol. XV+I, (ser. III, vol. I), fasc. 3-4, 1941; *Mem. IV*, « Archivio Bot. », vol. XVII, (ser. III, vol. I), fasc. 3-4, 1941; *Mem. V*, « Annali di Bot. », vol. XXII, fasc. III, 1942; *Mem. VI*, « Annali di Bot. », vol. XXII, fasc. III, 1942; *Mem. VII*, « Atti Soc. dei Natur. e Matem. di Modena », vol. LXXIV, 1943.
- Id. *Flora delle Provincie di Modena e Reggio Emilia*. « Atti Soc. dei Natur. e Matem. di Modena », vol. LXXV, pp. 1-64, 1944.
- PASQUINI D., *Associazioni boschive delle zone di Montegibbio e Pescaro*. « Atti Soc. dei Natur. e Matem. di Modena », vol. LXXIV, 1943.

Sul moto di un corpo rigido pesante
intorno ad un punto fisso, prossimo al baricentro
o poco differente dalla struttura giroscopica

Introduzione.

Data la particolare importanza non soltanto dal punto di vista teorico ma anche rispetto alle possibili applicazioni tecniche, del moto di un corpo rigido con un punto fisso, mi sono proposto, in questo lavoro, di studiare (ciò non mi consta sia stato fatto) il moto di un corpo rigido pesante intorno ad un punto fisso, il quale non coincida col baricentro, ma sia prossimo ad esso, moto, quindi, prossimo a un moto alla Poincot. Considero, quindi, il caso in cui il baricentro del corpo sia prossimo all'asse z e abbia rispetto a quest'asse struttura poco differente da quella giroscopica, e studio il moto di esso che è prossimo ad un moto giroscopico, discutendo la stabilità di alcuni moti particolari *quasi* stazionari (*).

§ 1. - Le equazioni di Eulero, che reggono il moto del sistema rigido in questione, sono, col solito significato dei simboli (1)

$$(1) \quad \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} - (B - C)qr &= M_x \\ B \frac{dq}{dt} - (C - A)rp &= M_y \\ C \frac{dr}{dt} - (A - B)pq &= M_z. \end{aligned}$$

Detti $\vec{\chi}$ il versore della verticale discendente, χ_1, χ_2, χ_3 le sue componenti rispetto alla terna di assi principali d'inerzia $O(x, y, z)$ relativi al punto O ed x_0, y_0, z_0 le coordinate del baricentro G del corpo, il momento \mathbf{M} del peso rispetto al punto O risulta

$$\mathbf{M} = (G - O) \wedge mg \vec{\chi}$$

(*) *Nota importante* - I vettori sono indicati in grassetto per quanto riguarda lettere latine, con freccia per lettere greche.

(1) Vedi T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. II, parte II, pag. 83 (Zanichelli, Bologna, 1927).

da cui

$$(2) \quad M_x = mg (y_0 \gamma_3 - z_0 \gamma_2) \quad , \quad M_y = mg (z_0 \gamma_1 - x_0 \gamma_3) \quad , \\ M_z = mg (x_0 \gamma_2 - y_0 \gamma_1)$$

e notiamo subito che, se x_0, y_0, z_0 sono degli infinitesimi, lo sono pure le componenti del momento M_x, M_y ed M_z . Detta $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ la soluzione delle equazioni di Eulero quando il baricentro coincide col punto fisso (moto alla Poincot), indicando con ξ, η, ζ le rispettive variazioni per il passaggio alla considerazione del moto in questione, scriveremo

$$(3) \quad p = \bar{p} + \xi \quad , \quad q = \bar{q} + \eta \quad , \quad r = \bar{r} + \zeta \quad .$$

Osservando che $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ soddisfano alle

$$(4) \quad A \frac{d\bar{p}}{dt} - (B \cdot C) \bar{q} \bar{r} = 0 \\ B \frac{d\bar{q}}{dt} - (C \cdot A) \bar{r} \bar{p} = 0 \\ C \frac{d\bar{r}}{dt} - (A \cdot B) \bar{p} \bar{q} = 0,$$

dopo aver sostituito nelle equazioni (1) e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo in ξ, η, ζ , otteniamo

$$(1) \quad A \frac{d\xi}{dt} - (B \cdot C) (\bar{q}\zeta + \bar{r}\eta) = mg (y_0 \bar{\gamma}_3 - z_0 \bar{\gamma}_2) \\ B \frac{d\eta}{dt} - (C \cdot A) (\bar{r}\xi + \bar{p}\zeta) = mg (z_0 \bar{\gamma}_1 - x_0 \bar{\gamma}_3) \\ C \frac{d\zeta}{dt} - (A \cdot B) (\bar{p}\eta + \bar{q}\xi) = mg (x_0 \bar{\gamma}_2 - y_0 \bar{\gamma}_1)$$

dove $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3$ sono i valori dei coseni direttori $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ della verticale discendente, nel moto approssimato alla Poincot. Questi coseni direttori devono, come si sa, soddisfare alle equazioni differenziali

$$(5) \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = (\gamma_2 r - \gamma_3 q) \quad , \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = (\gamma_3 p - \gamma_1 r) \quad , \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = (\gamma_1 q - \gamma_2 p)$$

e così pure si avrà

$$(5') \quad \frac{d\bar{\gamma}_1}{dt} = \bar{\gamma}_2 \bar{r} - \bar{\gamma}_3 \bar{q}, \quad \frac{d\bar{\gamma}_2}{dt} = \bar{\gamma}_3 \bar{p} - \bar{\gamma}_1 \bar{r}, \quad \frac{d\bar{\gamma}_3}{dt} = \bar{\gamma}_1 \bar{q} - \bar{\gamma}_2 \bar{p}.$$

Ponendo ora

$$(6) \quad \gamma_1 = \bar{\gamma}_1 + \varepsilon_1, \quad \gamma_2 = \bar{\gamma}_2 + \varepsilon_2, \quad \gamma_3 = \bar{\gamma}_3 + \varepsilon_3,$$

con elementari passaggi e trascurando i termini di ordine superiore al primo in $\frac{\varepsilon}{\bar{\gamma}}, \eta, \zeta$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, si ottengono le equazioni alle variazioni

$$(II) \quad \begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{dt} &= \bar{\gamma}_2 \zeta - \bar{\gamma}_3 \eta + \varepsilon_2 \bar{r} - \varepsilon_3 \bar{q}, \\ \frac{d\varepsilon_2}{dt} &= \bar{\gamma}_3 \xi - \bar{\gamma}_1 \zeta + \varepsilon_3 \bar{p} - \varepsilon_1 \bar{r}, \\ \frac{d\varepsilon_3}{dt} &= \bar{\gamma}_1 \eta - \bar{\gamma}_2 \xi + \varepsilon_1 \bar{q} - \varepsilon_2 \bar{p}. \end{aligned}$$

Basta considerare le equazioni alle variazioni (I) delle equazioni di Eulero per ricavare ξ, η, ζ e, una volta ricavate tali quantità, le (II) forniscono $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ed ε_3 . Ma osserviamo subito che si hanno tre integrali primi delle equazioni del moto: sussiste, infatti, l'integrale del momento scalare della quantità di moto

$$(7) \quad Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = K_0 \quad (\text{costante})$$

che, nel moto approssimato alla Poinsot, diventa

$$(7') \quad A\bar{p}\bar{\gamma}_1 + B\bar{q}\bar{\gamma}_2 + C\bar{r}\bar{\gamma}_3 = \bar{K}_0.$$

Pertanto, avuto riguardo alle (6) e tenendo conto, al solito, soltanto dei termini del primo ordine, si ha, per le equazioni alle variazioni (I) e (II), l'integrale

$$(7_1) \quad A(\bar{p}\varepsilon_1 + \bar{\gamma}_1 \xi) + B(\bar{q}\varepsilon_2 + \bar{\gamma}_2 \eta) + C(\bar{r}\varepsilon_3 + \bar{\gamma}_3 \zeta) = K_0 - \bar{K}_0 = \delta K_0.$$

Sussiste, poi, l'integrale delle forze vive:

$$(8) \quad \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - U = h$$

dove il potenziale U è $U = mg(G-O) \times \vec{\gamma} = mg(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3)$.

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo, esso diventa:

$$(9) \quad \frac{1}{2} \left\{ A(\bar{p}^2 + 2\bar{p}\bar{\xi}) + B(\bar{q}^2 + 2\bar{q}\bar{\eta}) + C(\bar{r}^2 + 2\bar{r}\bar{\zeta}) \right\} - mg(x_0\bar{\gamma}_1 + y_0\bar{\gamma}_2 + z_0\bar{\gamma}_3) = h.$$

Ma risulta

$$\frac{1}{2} (A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) = \bar{h}$$

dove \bar{h} è la costante delle forze vive nel moto alla Poincot, perciò la (9) porge

$$(10) \quad A\bar{p}\bar{\xi} + B\bar{q}\bar{\eta} + C\bar{r}\bar{\zeta} - mg(x_0\bar{\gamma}_1 + y_0\bar{\gamma}_2 + z_0\bar{\gamma}_3) = h - \bar{h} = \delta h.$$

Si ha, inoltre, $\bar{\gamma}^2 = 1$, $\bar{\gamma}'^2 = 1$, quindi:

$$(11) \quad \bar{\gamma}^2 - \bar{\gamma}'^2 = \bar{\gamma}_1\varepsilon_1 + \bar{\gamma}_2\varepsilon_2 + \bar{\gamma}_3\varepsilon_3 = 0.$$

Si hanno, allora, tre relazioni in termini finiti, (7), (10) e (11) fra le sei incognite $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, ε_1 , ε_2 ed ε_3 .

§ 2. - Nel caso particolare in cui il vettore momento della quantità di moto $\bar{K}_0 = A\bar{p}\bar{i} + B\bar{q}\bar{j} + C\bar{r}\bar{k}$ sia diretto verticalmente verso l'alto, si ha

$$\frac{\bar{K}_0}{\text{mod } \bar{K}_0} = \frac{\bar{K}_0}{l} = -\bar{\gamma} = -\bar{\gamma}' \quad (l = \text{mod } \bar{K}_0)$$

da cui

$$(11') \quad \bar{\gamma}_1 = -\frac{A\bar{p}}{l}, \quad \bar{\gamma}_2 = -\frac{B\bar{q}}{l}, \quad \bar{\gamma}_3 = -\frac{C\bar{r}}{l}.$$

In questo caso, le equazioni (I) diventano

$$(I') \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{d\bar{\xi}}{dt} - (B-C) (\bar{q}\bar{\xi} + \bar{r}\bar{\eta}) = \frac{mg}{l} (z_0 B\bar{q} - y_0 C\bar{r}) \\ B \frac{d\bar{\eta}}{dt} - (C-A) (\bar{r}\bar{\xi} + \bar{p}\bar{\zeta}) = \frac{mg}{l} (x_0 C\bar{r} - z_0 A\bar{p}) \\ C \frac{d\bar{\zeta}}{dt} - (A-B) (\bar{p}\bar{\eta} + \bar{q}\bar{\xi}) = \frac{mg}{l} (y_0 A\bar{p} - x_0 B\bar{q}). \end{array} \right.$$

Consideriamo le possibili soluzioni delle (I') in cui ξ , η , ζ siano funzioni lineari in \bar{p} , \bar{q} , \bar{r} , cioè

$$(12) \quad \begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \xi_1 \bar{p} + \xi_2 \bar{q} + \xi_3 \bar{r} \\ \eta &= \eta_0 + \eta_1 \bar{p} + \eta_2 \bar{q} + \eta_3 \bar{r} \\ \zeta &= \zeta_0 + \zeta_1 \bar{p} + \zeta_2 \bar{q} + \zeta_3 \bar{r}. \end{aligned}$$

Sostituendo nelle equazioni (I'), tenendo conto delle (4) ed uguagliando i coefficienti dei termini corrispondenti in \bar{p} , \bar{q} , \bar{r} , si hanno i tre gruppi di condizioni

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} (B-C) \zeta_0 &= -\frac{mg}{l} B z_0; & (B-C) \eta_0 &= \frac{mg}{l} C y_0; \\ \frac{A(A-B)}{C} \xi_3 - (B-C) \xi_1 &= 0; & (B-C) (\xi_1 - \xi_3 - \eta_2) &= 0; \\ \frac{A(C-A)}{B} \xi_2 - (B-C) \eta_1 &= 0; & (B-C) \zeta_1 &= 0; & (B-C) \eta_3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} (C-A) \zeta_0 &= \frac{mg}{l} A z_0; & (C-A) \xi_0 &= -\frac{mg}{l} C x_0; \\ \frac{B(A-B)}{C} \eta_3 - (C-A) \zeta_2 &= 0; & \frac{B(B-C)}{A} \eta_1 - (C-A) \xi_2 &= 0; \\ (C-A) (\eta_2 - \xi_1 - \zeta_3) &= 0; & (C-A) \xi_3 &= 0; & (C-A) \zeta_1 &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} (A-B) \eta_0 &= -\frac{mg}{l} A y_0; & (A-B) \xi_0 &= \frac{mg}{l} B x_0; \\ (A-B) (\zeta_3 - \eta_2 - \xi_1) &= 0; & \frac{C(B-C)}{A} \zeta_1 - (A-B) \xi_3 &= 0; \\ \frac{C(C-A)}{B} \zeta_2 - (A-B) \eta_3 &= 0; & (A-B) \eta_1 &= 0; & (A-B) \xi_2 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Da questi tre gruppi di condizioni, si ricava ordinatamente:

$$(14) \quad \zeta_0 = -\frac{mg}{l} \frac{B}{B-C} z_0, \quad \eta_0 = \frac{mg}{l} \frac{C}{B-C} y_0;$$

$$(14') \quad \zeta_0 = -\frac{mg}{l} \frac{A}{A-C} z_0, \quad \xi_0 = -\frac{mg}{l} \frac{C}{C-A} x_0;$$

$$(14'') \quad \eta_0 = \frac{mg}{l} \frac{A}{B-A} y_0, \quad \xi_0 = -\frac{mg}{l} \frac{B}{B-A} x_0.$$

Analizzando la compatibilità delle relazioni scritte, si stabilisce facilmente che tutte le condizioni sono soddisfatte per $A = B \neq C$; $x_0 = y_0$ (caso di Lagrange) ; $\xi_0 = 0$, $\xi_3 = 0$; $v_0 = 0$, $v_3 = 0$; $z_0 = \frac{mg}{l} \frac{A}{C \cdot A} z_0$; $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$; $v_1 = -\xi_2$, $v_2 = -\xi_1$; e, quindi

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{\xi} &= \xi_1 \bar{p} + \xi_2 \bar{q} ; & v_1 &= -\xi_2 \bar{p} + \xi_1 \bar{q} ; \\ \dot{z} &= z_0 = \frac{mg}{l} \frac{A}{C \cdot A} z_0 \text{ (costante infinitesima)} \end{aligned}$$

che è una soluzione delle equazioni (I') con ξ_1 e ξ_2 costanti.

Giova osservare che, in questo caso, le equazioni che danno \bar{p} , \bar{q} , \bar{r} , diventano (essendo $A = B$):

$$(16) \quad \frac{d\bar{p}}{dt} + \frac{C \cdot A}{A} \frac{\bar{r}}{q\bar{r}} = 0, \quad \frac{d\bar{q}}{dt} - \frac{C \cdot A}{A} \frac{\bar{r}}{r\bar{p}} = 0, \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = 0,$$

per cui si ha $\bar{r} = r_0$ (costante) e, posto $\frac{C \cdot A}{A} r_0 = \omega$, si ha

$$(17) \quad \bar{p} = \lambda \cos(\omega t + \alpha_0), \quad \bar{q} = \lambda \sin(\omega t + \alpha_0),$$

con λ ed α_0 costanti arbitrarie.

Dopo ciò, determiniamo ancora gli incrementi ε_1 , ε_2 ed ε_3 di Z_1 , Z_2 , Z_3 . Ci si può servire, intanto, delle relazioni (7₁) ed (11), le quali, ricordando le espressioni (11') di \bar{Z}_1 , \bar{Z}_2 , \bar{Z}_3 , diventano, rispettivamente

$$(18) \quad A(\bar{p}\varepsilon_1 + \bar{q}\varepsilon_2) - \frac{A^2}{l} \xi_1 (\bar{p}^2 + \bar{q}^2) + Cr_0 \left(\varepsilon_3 - \frac{C}{l} z_0 \right) = \delta K_0,$$

$$(19) \quad A(\bar{p}\varepsilon_1 + \bar{q}\varepsilon_2) + Cr_0 \varepsilon_3 = 0.$$

Da questa, si ricava:

$$(20) \quad \frac{A^2}{l} \xi_1 (\bar{p}^2 + \bar{q}^2) + \frac{C^2}{l} r_0 z_0 = -\delta K_0$$

cioè

$$\frac{A^2}{l} \xi_1 \lambda^2 + \frac{C^2}{l} r_0 z_0 = -\delta K_0,$$

da cui si ricava il valore della costante ξ_1 . L'integrale (10) delle forze vive diventa

$$(21) \quad A \xi_1 (\bar{p}^2 + \bar{q}^2) + Cr_0 z_0 + mg z_0 \frac{Cr_0}{l} = \delta h,$$

ovvero

$$(22) \quad A \xi_1 \lambda^2 + Cr_0 z_0 + \frac{mg z_0 Cr_0}{l} = \delta h,$$

che è un'altra relazione cui deve soddisfare ξ_1 ; eliminando ξ_1 si ha una relazione fra δh e δK_0 .

Le prime due equazioni del sistema (II) diventano

$$(23) \quad \frac{d\varepsilon_1}{dt} = -\frac{Cr_0}{l} \xi_2 \bar{p} + \left(\frac{Cr_0}{l} \xi_1 - \frac{A}{l} z_0 - \varepsilon_3 \right) \bar{q} + r_0 \varepsilon_2$$

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = -\left(\frac{Cr_0}{l} \xi_1 - \frac{A}{l} z_0 - \varepsilon_3 \right) \bar{p} - \frac{Cr_0}{l} \xi_2 \bar{q} - r_0 \varepsilon_1.$$

Moltiplicando la prima equazione per \bar{p} , la seconda per \bar{q} e sommando, si ottiene

$$(24) \quad \frac{d}{dt} (\bar{p} \varepsilon_1 + \bar{q} \varepsilon_2) - \left(\varepsilon_1 \frac{d\bar{p}}{dt} + \varepsilon_2 \frac{d\bar{q}}{dt} \right) = \\ = -\frac{Cr_0}{l} \xi_2 \lambda^2 - r_0 (\varepsilon_1 \bar{q} - \varepsilon_2 \bar{p}),$$

da cui, ricordando che è

$$(25) \quad \frac{d\bar{p}}{dt} + \omega \bar{q} = 0, \quad \frac{d\bar{q}}{dt} - \omega \bar{p} = 0,$$

segue

$$(26) \quad \frac{d}{dt} (\bar{p} \varepsilon_1 + \bar{q} \varepsilon_2) = -\frac{Cr_0}{l} \xi_2 \lambda^2 - (\omega + r_0) (\varepsilon_1 \bar{q} - \varepsilon_2 \bar{p}).$$

Analogamente, moltiplicando la prima delle (23) per \bar{q} , la seconda per \bar{p} e sottraendo, si ha

$$(27) \quad \frac{d}{dt} (\bar{q} \varepsilon_1 - \bar{p} \varepsilon_2) - \omega (\bar{p} \varepsilon_1 + \bar{q} \varepsilon_2) = \\ = \left(\frac{Cr_0}{l} \xi_1 - \frac{A}{l} z_0 \right) \lambda^2 - \lambda^2 \varepsilon_3 + r_0 (\bar{p} \varepsilon_1 + \bar{q} \varepsilon_2).$$

Eliminando ε_3 mediante la (19) che porge

$$\varepsilon_3 = -\frac{A}{Or_0} (\bar{p}\varepsilon_1 + \bar{q}\varepsilon_2),$$

si ottiene

$$(28) \quad \frac{d}{dt} (\bar{q}\varepsilon_1 - \bar{p}\varepsilon_2) = \left(\omega + r_0 + \lambda^2 \frac{A}{Or_0} \right) (\bar{p}\varepsilon_1 + \bar{q}\varepsilon_2) + \left(\frac{Or_0}{l} \xi_1 - \frac{A}{l} \zeta_0 \right) \lambda^2.$$

Dimodochè, se poniamo

$$(29) \quad \varepsilon' = \bar{p}\varepsilon_1 + \bar{q}\varepsilon_2, \quad \varepsilon'' = \bar{q}\varepsilon_1 - \bar{p}\varepsilon_2,$$

si hanno le due equazioni

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varepsilon'}{dt} + (\omega + r_0) \varepsilon' = -\frac{Or_0}{l} \xi_2 \lambda^2, \\ \frac{d\varepsilon''}{dt} - \left(\omega + r_0 + \lambda^2 \frac{A}{Or_0} \right) \varepsilon'' = \left(\frac{Or_0}{l} \xi_1 - \frac{A}{l} \zeta_0 \right) \lambda^2. \end{array} \right.$$

Derivando la prima rispetto a t e tenendo conto della seconda, si ha

$$(31) \quad \frac{d^2\varepsilon'}{dt^2} + (\omega + r_0) \left(\omega + r_0 + \lambda^2 \frac{A}{Or_0} \right) \varepsilon' + (\omega + r_0) \left(\frac{Or_0}{l} \xi_1 - \frac{A}{l} \zeta_0 \right) \lambda^2 = 0,$$

da cui, posto

$$\Omega^2 = (\omega + r_0) \left(\omega + r_0 + \lambda^2 \frac{A}{Or_0} \right),$$

si deduce

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon' = \varepsilon_0 \cos(\Omega t + \beta_0) - \frac{\left(\frac{Or_0}{l} \xi_1 - \frac{A}{l} \zeta_0 \right) \lambda^2}{\omega + r_0 + \lambda^2 \frac{A}{Or_0}}, \\ \varepsilon'' = \frac{\Omega}{\omega + r_0} \varepsilon_0 \sin(\Omega t + \beta_0) - \frac{Or_0}{C(\omega + r_0)} \xi_2 \lambda^2, \end{array} \right.$$

con ε_0 e β_0 costanti arbitrarie.

Ricavate ε' ed ε'' , si hanno, poi, le relazioni che danno ε_1 , ε_2 ed ε_3

$$(33) \quad \varepsilon_1 = \frac{\bar{p}\varepsilon' + \bar{q}\varepsilon''}{\lambda^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\bar{q}\varepsilon' - \bar{p}\varepsilon''}{\lambda^2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{A}{Cr_0} \varepsilon'.$$

§ 3. - Prendiamo ancora in considerazione il moto alla Poincot del sistema in questione (quando cioè il baricentro coincide col punto fisso).

Si ha qui la soluzione stazionaria $\bar{p} = \bar{q} = 0$, $\bar{r} = n$ (costante); e risulta

$$(34) \quad \frac{d\bar{\gamma}_1}{dt} = \bar{\gamma}_2 n, \quad \frac{d\bar{\gamma}_2}{dt} = -\bar{\gamma}_1 n, \quad \frac{d\bar{\gamma}_3}{dt} = 0.$$

In questo caso, assumendo la terna di assi fissi $O(XYZ)$ con l'asse OZ coincidente con l'asse di rotazione Oz , per gli angoli di Eulero Θ , φ , ψ si hanno le relazioni

$$(35) \quad \Theta = 0, \quad \dot{\varphi} + \dot{\psi} = n \quad \text{da cui} \quad \varphi + \psi = n(t - t_0) = H.$$

Indicando, allora, rispettivamente con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e con $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i coseni direttori degli assi OX, OZ rispetto alla terna mobile $O(x, y, z)$, si ha

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \cos(\varphi + \psi) = \cos H, \quad \alpha_2 = -\sin(\varphi + \psi) = \\ \hspace{15em} = -\sin H, \quad \alpha_3 = 0, \\ \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1. \end{array} \right.$$

Assumendo l'asse fisso OX in modo che sia contenuto nel piano verticale per OZ e indicando con α l'angolo che la verticale discendente $\vec{\chi}$ forma con l'asse fisso OX , risulta

$$(37) \quad \bar{\gamma}_1 = \cos \alpha \cdot \cos H, \quad \bar{\gamma}_2 = -\cos \alpha \sin H, \\ \bar{\gamma}_3 = -\sin \alpha \text{ (costante)}.$$

Tenuta presente la relazione $n dt = dH$, le equazioni alle variazioni (I) assumeranno qui la forma

$$(38) \quad \frac{d\bar{\xi}}{dH} - \frac{B-C}{A} \bar{\gamma}_1 = \frac{mg}{nA} (-y_0 \sin \alpha + z_0 \cos \alpha \sin H),$$

(continua a pag. seg.)

$$(38) \quad \frac{d\eta_1}{dH} - \frac{C \cdot A}{B} \xi = \frac{mg}{nB} (z_0 \cos \alpha \cos H + x_0 \sin \alpha),$$

$$\frac{d\xi}{dH} = - \frac{mg}{mC} \cos \alpha (x_0 \sin H + y_0 \cos H).$$

La terza delle (38) porge subito l'integrale

$$(39) \quad \xi = \frac{mg}{nC} \cos \alpha (x_0 \cos H - y_0 \sin H) + \xi_0 \quad (\xi_0 \text{ costante}).$$

Eliminando poi η_1 fra le prime due e ponendo $\tau^2 = \frac{(B \cdot C)(A \cdot C)}{A \cdot B}$, ove si sia supposto $A > B > C$, si ottiene l'equazione

$$(40) \quad \frac{d^2 \xi}{dH^2} + \tau^2 \xi = \frac{mg}{nAB} [(2B \cdot C) z_0 \cos \alpha \cos H + (B \cdot C) x_0 \sin \alpha],$$

e questa porge

$$(41) \quad \begin{aligned} \xi = & \xi_0 \sin(\tau H + \alpha_0) + \\ & + \frac{mg}{nAB} \left[\frac{2B \cdot C}{\tau^2 - 1} z_0 \cos \alpha \cos H + \frac{B \cdot C}{\tau^2} x_0 \sin \alpha \right], \end{aligned}$$

da cui si ricava immediatamente $\frac{d\xi}{dH}$ e, perciò, si ha, dopo facili passaggi

$$(42) \quad \begin{aligned} \eta_1 = & \frac{A}{B \cdot C} \tau \xi_0 \cos(\tau H + \alpha_0) + \\ & + \frac{mg}{nB(B \cdot C)} \left[y_0 B \sin \alpha - \left(\frac{2B \cdot C}{\tau^2 - 1} + B \right) z_0 \cos \alpha \sin H \right]. \end{aligned}$$

Sostituendo, poi, al posto di $\tau^2 - 1$ la sua espressione in funzione dei momenti principali d'inerzia, otteniamo

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi = & \xi_0 \sin(\tau H + \alpha_0) + \\ & + \frac{mg}{n(A \cdot C)} \left[x_0 \sin \alpha - \frac{(A \cdot C)(2B \cdot C)}{C(A + B \cdot C)} z_0 \cos \alpha \cos H \right], \\ \eta_1 = & \frac{A}{B \cdot C} \tau \xi_0 \cos(\tau H + \alpha_0) + \\ & + \frac{mg}{n(B \cdot C)} \left[y_0 \sin \alpha + \frac{(B \cdot C)(2A \cdot C)}{C(A + B \cdot C)} z_0 \cos \alpha \sin H \right], \end{aligned} \right.$$

$[H = n(t - t_0)]$ con ξ_0 ed x_0 costanti arbitrarie, ξ_0 costante infinitesima.

Questi valori di ξ ed η risultano periodici di periodo $\frac{2\pi}{n}$ se poniamo $\xi_0 = 0$, ed allora si ha più semplicemente

$$(43') \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{mg}{n(A-C)} (x_0 \operatorname{sen} \alpha - \lambda z_0 \cos \alpha \cos H), \\ \eta = \frac{mg}{n(B-C)} (y_0 \operatorname{sen} \alpha + \mu z_0 \cos \alpha \operatorname{sen} H), \quad [H = n(t - t_0)] \end{array} \right.$$

$$\text{con } \lambda = \frac{(A-C)(2B-C)}{C(A+B-C)}, \quad \mu = \frac{(B-C)(2A-C)}{C(A+B-C)}.$$

I termini in ξ_0 delle (43) cioè quelli indipendenti da mg , sono quelli dovuti all'oscillazione libera, e sono periodici di periodo $\frac{2\pi}{\tau}$; i termini dipendenti da mg danno, invece, l'oscillazione forzata dovuta al peso. L'oscillazione risultante è periodica nel caso in cui τ è un numero razionale diverso da uno. Osserviamo che l'integrale (7₁) delle aree e l'integrale (10) delle forze vive diventano ora rispettivamente

$$(44) \quad A \bar{\gamma}_1 \dot{\xi} + B \bar{\gamma}_2 \dot{\eta} + C(n \dot{\xi}_3 + \bar{\gamma}_3 \dot{\zeta}) = \delta K_0$$

$$(45) \quad Cn \dot{\zeta} - mg(x_0 \bar{\gamma}_1 + y_0 \bar{\gamma}_2 + z_0 \bar{\gamma}_3) = \delta h$$

e sussiste inoltre la (11) cioè

$$(46) \quad \bar{\gamma}_1 \varepsilon_1 + \bar{\gamma}_2 \varepsilon_2 + \bar{\gamma}_3 \varepsilon_3 = 0.$$

Dalla (44) si ricava senz'altro

$$(47) \quad \dot{\xi}_3 = \frac{1}{Cn} [\delta K_0 - (A \bar{\gamma}_1 \dot{\xi} + B \bar{\gamma}_2 \dot{\eta} + C \bar{\gamma}_3 \dot{\zeta})],$$

cioè sostituendo in luogo di $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3$ i valori espressi dalle (37) e in luogo di $\dot{\xi}, \dot{\eta}$ e $\dot{\zeta}$ i valori definiti dalle (43) e (39), si ottiene

$$(47') \quad \varepsilon_3 = \frac{\delta K_0}{Cn} - \frac{A}{Cn} \dot{z}_0 \cos \alpha \left[\cos H \operatorname{sen} (\tau H + \alpha_0) - \right. \\ \left. - \frac{B}{B \cdot C} \tau \operatorname{sen} H \cos (\tau H + \alpha_0) \right] - \frac{mg}{n^2 (A - C)} x_0 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cos H + \\ + \frac{mg}{n^2 (B - C)} y_0 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{sen} H - \frac{mg}{n^2 C} \frac{A}{A + B - C} \frac{B}{C} z_0 \cos^2 \alpha \cos^2 H + \\ + \frac{mg}{n^2 C^2} \frac{B(2A - C)}{A + B - C} z_0 \cos^2 \alpha + \frac{1}{n} \operatorname{sen} \alpha \dot{z}_0 .$$

La (45) porge poi

$$(48) \quad \dot{z} = \frac{mg}{n C} \cos \alpha (x_0 \cos H - y_0 \operatorname{sen} H) \quad \frac{mg}{Cn} z_0 \operatorname{sen} \alpha + \frac{\delta h}{Cn} .$$

Confrontando col valore di \dot{z} espresso dalla (39), si ha che la costante \dot{z}_0 è data da

$$(49) \quad \dot{z}_0 = \frac{\delta h}{Cn} - \frac{mg}{Cn} z_0 \operatorname{sen} \alpha .$$

Per calcolare ε_1 ed ε_2 osserviamo che le prime due delle equazioni (1) diventano ora

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varepsilon_1}{dH} = \frac{1}{n} (\bar{\gamma}_2 \dot{z} - \bar{\gamma}_3 \dot{v}_1) + \varepsilon_2 , \\ \frac{d\varepsilon_2}{dH} = \frac{1}{n} (\bar{\gamma}_3 \dot{z} - \bar{\gamma}_1 \dot{z}) - \varepsilon_1 . \end{array} \right.$$

Eliminando ε_3 e ricordando che $\bar{\gamma}_3$ è costante, si ha

$$\frac{d^2 \varepsilon_1}{dH^2} + \varepsilon_1 = \frac{1}{n} \left(\frac{d\bar{\gamma}_2}{dH} \dot{z} + \bar{\gamma}_2 \frac{d\dot{z}}{dH} - \bar{\gamma}_3 \frac{d\dot{v}_1}{dH} + \bar{\gamma}_3 \dot{z} - \bar{\gamma}_1 \dot{z} \right) ,$$

ovvero, con facili sostituzioni

$$(51) \quad \frac{d^2 \varepsilon_1}{dH^2} + \varepsilon_1 = - \frac{mg}{n^2 (A - C)} x_0 \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{mg}{n^2 C} x_0 \cos^2 \alpha + \\ + \frac{2}{n} \cos \alpha \left(\frac{mg}{n C} z_0 \operatorname{sen} \alpha - \dot{z}_0 \right) \cos H + \frac{3mg}{n^2 C} y_0 \cos^2 \alpha \operatorname{sen} H \cos H - \\ - \frac{3mg}{n^2 C} x_0 \cos^2 \alpha \cos^2 H - \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \dot{z}_0}{n B} (A + B - C) \operatorname{sen} (\tau H + \alpha_0) .$$

Allora, se

$$(52) \quad \cos \alpha \left(\frac{mg}{nC} z_0 \operatorname{sen} \alpha - \frac{z}{z_0} \right) = 0,$$

si ha

$$(53) \quad \varepsilon_1 = B_1 \operatorname{sen} H + C_1 \cos H - \frac{mg}{n^2} x_0 \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{A-C} + \frac{\cos^2 \alpha}{C} \right) + \\ + \frac{mg}{n^2 C} \cos^2 \alpha \cos H (x_0 \cos H - y_0 \operatorname{sen} H) - \frac{A}{nC} \xi_0 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (\tau H + \alpha_0),$$

con B_1 e C_1 costanti arbitrarie. Sostituendo nella prima delle (50), si ricava, in corrispondenza, ε_2 .

Se, invece, consideriamo il caso più generale in cui

$$(54) \quad \cos \alpha \left(\frac{mg}{nC} z_0 \operatorname{sen} \alpha - \frac{z}{z_0} \right) = 0,$$

si deduce

$$(55) \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{n} \cos \alpha \left(\frac{mg}{nC} z_0 \operatorname{sen} \alpha - \frac{z}{z_0} \right) H \operatorname{sen} H + B_1 \operatorname{sen} H + \\ + C_1 \cos H - \frac{mg}{n^2} x_0 \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{A-C} + \frac{\cos^2 \alpha}{C} \right) + \\ + \frac{mg}{n^2 C} \cos^2 \alpha \cos H (x_0 \cos H - y_0 \operatorname{sen} H) - \frac{A}{nC} \xi_0 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (\tau H + \alpha_0),$$

e, in corrispondenza

$$(56) \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{n} \cos \alpha \left(\frac{mg}{nC} z_0 \operatorname{sen} \alpha - \frac{z}{z_0} \right) H \cos H + B_1 \cos H - \\ - \left[\frac{mg}{n^2 C} \cdot \frac{A-B}{A+B-C} z_0 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + C_1 \right] \operatorname{sen} H - \\ - \frac{mg}{n^2 C} \cos^2 \alpha \cos H (x_0 \operatorname{sen} H + y_0 \cos H) - \\ - \frac{A-C}{nC\tau} \xi_0 \operatorname{sen} \alpha \cos (\tau H + \alpha_0) - \frac{mg}{n^2 (B-C)} y_0 \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

I valori trovati di ε_1 , ε_2 ed ε_3 , definiti dalle (55), (56) e (47') devono soddisfare identicamente alla relazione (46). Fatta la sostituzione, affinchè essa si riduca ad una identità, è necessario che

fra le costanti sussista la relazione

$$(57) \quad C_1 = \frac{mg}{n^2 C} \cdot \frac{A(2B - C)}{C(A + B - C)} z_0 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \\ + \frac{\delta K_0}{Cn} \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{n} z_0 \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha .$$

Abbiamo visto che l'integrale delle forze-vive porge la costante z_0 ; restano arbitrarie ancora l'ampiezza z_0 e la fase α_0 dell'oscillazione libera e la costante di direzione B_1 . Abbiamo anche visto che, nel caso in cui $\cos \alpha \left(\frac{mg}{n^2 C} z_0 \operatorname{sen} \alpha - z_0 \right) = 0$, il solido si muove conservando il suo asse d'inerzia Oz sempre in prossimità dell'asse OK_0 e il moto è, quindi, stabile. Se quella condizione non è soddisfatta, allora, pur mantenendosi sempre piccole le rotazioni ξ ed η intorno agli assi principali x ed y , le ampiezze degli incrementi ε_1 ed ε_2 dei coseni direttori γ_1 e γ_2 tendono a crescere col tempo; ciò significa che l'ampiezza dell'oscillazione del piano equatoriale xy intorno alla verticale tende ad aumentare fino a disporsi orizzontalmente. La suddetta condizione è sempre verificata se $\cos \alpha = 0$ e ciò è naturale; ma essa è anche verificata per $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ se $z_0 = \frac{mg}{n^2 C} z_0 \operatorname{sen} \alpha$, cioè se $\frac{\delta h}{Cn} - \frac{mg}{Cn} z_0 \operatorname{sen} \alpha = \frac{mg}{Cn} z_0 \operatorname{sen} \alpha$, cioè se $\delta h = 2mgz_0 \operatorname{sen} \alpha$. Ricordiamo che la distanza $\delta = OM$ dal punto fisso O del piano tangente all'ellissoide d'inerzia nel *vertice* vale $\delta = \frac{\sqrt{2T}}{\operatorname{mod} K_0}$. Ma, nel nostro caso, si ha

$$T = \frac{1}{2} [C(n^2 + 2nz)] , \quad \sqrt{2T} = n \sqrt{C} \left(1 + \frac{z}{n} \right) ,$$

$$K_0^2 = C^2 n^2 \left(1 + \frac{2z}{n} \right) , \quad \text{da cui} \quad \operatorname{mod} K_0 = Cn \left(1 + \frac{z}{n} \right) .$$

Il rapporto $\frac{\sqrt{2T}}{\operatorname{mod} K_0} = \delta$ resta, quindi, costante; ciò significa che il piano tangente nel *vertice* all'ellissoide d'inerzia resta fisso durante l'oscillazione del corpo e quel piano coincide col piano invariabile del moto alla Poincot.

§ 4. - Riprendiamo le equazioni del moto di un solido pesante intorno ad un punto fisso

$$\begin{aligned}
 A \frac{dp}{dt} - (B - C) q r &= mg (y_0 \lambda_3 - z_0 \lambda_2) & \frac{d\lambda_1}{dt} &= \lambda_2 r - \lambda_3 q \\
 (I) \quad B \frac{dq}{dt} - (C - A) r p &= mg (z_0 \lambda_1 - x_0 \lambda_3) & (II) \quad \frac{d\lambda_2}{dt} &= \lambda_3 p - \lambda_1 r \\
 C \frac{dr}{dt} - (A - B) p q &= mg (x_0 \lambda_2 - y_0 \lambda_1) & \frac{d\lambda_3}{dt} &= \lambda_1 q - \lambda_2 p .
 \end{aligned}$$

Nel caso in cui sia $x_0 = y_0 = 0$ ed $A = B$ cioè nel caso in cui il baricentro sia sull'asse z ed il corpo abbia struttura giroscopica, il problema si riconduce, come si sa, alle quadrature. Le equazioni euleriane del moto diventano

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} - \frac{A - C}{A} q r &= - \frac{mg}{A} z_0 \lambda_2 \\
 (58) \quad \frac{dq}{dt} - \frac{C - A}{A} r p &= \frac{mg}{A} z_0 \lambda_1 \\
 C \frac{dr}{dt} &= 0 .
 \end{aligned}$$

Si ha $r = n$ (costante) mentre p e q sono dati da integrali ellittici. Supponiamo, ora, che x_0 e y_0 non siano più nulli, ma infinitesimi e che sia infinitesima la differenza $A - B = \varepsilon A$ mentre z_0 sia finito. Vogliamo studiare le piccole oscillazioni. Scriviamo le equazioni alle variazioni ponendo al solito:

$$\begin{aligned}
 (59) \quad p &= \bar{p} + \xi, \quad q = \bar{q} + \eta, \quad r = \bar{r} + \zeta; \\
 \lambda_1 &= \bar{\lambda}_1 + \varepsilon_1, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_2 + \varepsilon_2, \quad \lambda_3 = \bar{\lambda}_3 + \varepsilon_3
 \end{aligned}$$

ove $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$ è soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange; si ha, come è noto già, $\bar{r} = n$ (costante) e quindi $r = n + \zeta$. Le equazioni (I), con semplici calcoli, porgono le equazioni alle variazioni

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \frac{d\xi}{dt} - \frac{A - C}{A} (\bar{q}\zeta + n\eta) + \varepsilon n\bar{q} &= \frac{mg}{A} (y_0 \bar{\lambda}_3 - z_0 \varepsilon_2) \\
 \frac{d\eta}{dt} - \frac{C - A}{A} (n\xi + \bar{p}\zeta) - \varepsilon \frac{d\bar{q}}{dt} &= \frac{mg}{A} (z_0 \varepsilon_1 - x_0 \bar{\lambda}_3) \\
 \frac{d\zeta}{dt} &= \varepsilon \frac{A}{C} \bar{p}\bar{q} + \frac{mg}{C} (x_0 \bar{\lambda}_2 - y_0 \bar{\lambda}_1) .
 \end{aligned} \right.$$

Il secondo membro della terza di queste equazioni è funzione nota del tempo; perciò esso fornisce ζ con una quadratura. Analogamente, dalle (II) seguono le altre tre equazioni

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{dt} &= (n\varepsilon_2 + \bar{\gamma}_2 \zeta) - (\bar{q}\varepsilon_3 + \bar{\gamma}_3 \eta) \\ \frac{d\varepsilon_2}{dt} &= (\bar{p}\varepsilon_3 + \bar{\gamma}_3 \xi) - (n\varepsilon_1 + \bar{\gamma}_1 \zeta) \\ \frac{d\varepsilon_3}{dt} &= (\bar{q}\varepsilon_1 + \bar{\gamma}_1 \eta) - (\bar{p}\varepsilon_2 + \bar{\gamma}_2 \xi) \end{aligned} \right.$$

Si avrà

$$(\bar{\gamma}_1 + \varepsilon_1)^2 + (\bar{\gamma}_2 + \varepsilon_2)^2 + (\bar{\gamma}_3 + \varepsilon_3)^2 = 1,$$

cioè, essendo $\bar{\gamma}_1^2 + \bar{\gamma}_2^2 + \bar{\gamma}_3^2 = 1$,

$$(62) \quad \bar{\gamma}_1 \varepsilon_1 + \bar{\gamma}_2 \varepsilon_2 + \bar{\gamma}_3 \varepsilon_3 = 0$$

Venendo a considerare gli integrali del problema, sussiste l'integrale del momento scalare della quantità di moto. Precisamente, è

$$(63) \quad \mathbf{K}_0 \times \vec{\chi} = K_0 \text{ (costante) } \quad \text{cioè} \quad Ap\chi_1 + Bq\chi_2 + Cr\chi_3 = K_0,$$

ovvero

$$A(\bar{p} + \xi)(\bar{\gamma}_1 + \varepsilon_1) + B(\bar{q} + \eta)(\bar{\gamma}_2 + \varepsilon_2) + C(\eta + \zeta)(\bar{\gamma}_3 + \varepsilon_3) = K_0$$

ed essendo $A(\bar{p}\bar{\gamma}_1 + \bar{q}\bar{\gamma}_2) + Cn\bar{\gamma}_3 = K_0$, a meno di infinitesimi di ordine superiore a $\xi, \eta, \zeta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ed ε , si ottiene

$$(64) \quad A(\bar{p}\varepsilon_1 + \bar{q}\varepsilon_2 + \bar{\gamma}_1 \xi + \bar{\gamma}_2 \eta) + C(n\varepsilon_3 + \bar{\gamma}_3 \zeta) - \varepsilon A\bar{q}\bar{\gamma}_2 = \delta K_0.$$

Sussiste, poi, l'integrale delle forze vive:

$$(65) \quad T - U = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - mg(x_0\chi_1 + y_0\chi_2 + z_0\chi_3) = h,$$

che diventa

$$(65') \quad \frac{1}{2} [A(\bar{p}^2 + \bar{q}^2) + Cn^2] + A(\bar{p}\xi + \bar{q}\eta) + Cn\zeta - \frac{1}{2} \varepsilon A\bar{q}^2 - mg(x_0\bar{\gamma}_1 + y_0\bar{\gamma}_2 + z_0\varepsilon_3) - mgz_0\bar{\gamma}_2 = h$$

ed essendo $\frac{1}{2} [A(\bar{p}^2 + \bar{q}^2) + Cn^2] - mgz_0 \bar{\gamma}_3 = h$, si riduce alla relazione

$$(66) \quad A(\bar{p} \dot{\xi} + \bar{q} \dot{\eta}) + Cn \dot{\zeta} - \frac{1}{2} \varepsilon A \bar{q}^2 - mg(x_0 \bar{\gamma}_1 + y_0 \bar{\gamma}_2 + z_0 \varepsilon_3) = h - \bar{h} = \delta h.$$

Si possono scegliere, ora, gli assi fissi $OXYZ$ con l'asse OZ verticale verso l'alto; allora, essendo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i coseni direttori dell'asse OZ rispetto alla terna di assi solidali, si ha $\lambda_1 = -\gamma_1, \lambda_2 = -\gamma_2, \lambda_3 = -\gamma_3$, ove, per mezzo degli angoli di Eulero, è $\gamma_1 = \sin \varphi \sin \Theta, \gamma_2 = \cos \varphi \sin \Theta, \gamma_3 = \cos \Theta$. Le equazioni di Eulero-Lagrange hanno, allora, la forma particolare

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{dp}{dt} - (A - C) q r = mgz_0 \gamma_2, \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q \\ A \frac{dq}{dt} + (A - C) r p = -mgz_0 \gamma_1, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r \\ C \frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p. \end{array} \right.$$

L'integrale del momento scalare della quantità di moto e l'integrale dell'energia assumono, in questo caso, le rispettive espressioni,

$$(68) \quad A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + Cr\gamma_3 = K_0,$$

$$(69) \quad \frac{1}{2\bar{h}} [A(p^2 + q^2) + Cr^2] + mgz_0 \gamma_3 = \bar{h}$$

e si ha, inoltre, $r = n$ (costante). L'equazione delle forze vive si può scrivere

$$(70) \quad p^2 + q^2 = \frac{2\bar{h} - Cn^2}{A} - \frac{2mgz_0}{A} \cos \Theta,$$

e, ponendo

$$a_0 = \frac{2\bar{h} - Cn^2}{A}, \quad a = \frac{2mgz_0}{A}, \quad a > 0:$$

$$(70') \quad p^2 + q^2 = a_0 - a \cos \Theta.$$

D'altra parte, l'integrale del momento scalare della quantità di moto, posto $b_0 = \frac{K_0}{A}$, $b = \frac{C}{A}$, $b > 0$, dove a e b sono costanti

determinate, a_0 e b_0 costanti arbitrarie, diventa

$$(71) \quad \text{sen } \Theta (p \text{ sen } \varphi + q \text{ cos } \varphi) = b_0 - bn \text{ cos } \Theta.$$

Si ha, ora, com'è noto (vedi T. Levi-Civita e U. Amaldi, loc. cit. pag. 84).

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \dot{\psi} \text{ sen } \Theta \text{ sen } \varphi + \dot{\Theta} \text{ cos } \varphi \\ q = \dot{\psi} \text{ sen } \Theta \text{ cos } \varphi - \dot{\Theta} \text{ sen } \varphi \\ r = \dot{\psi} \text{ cos } \Theta + \dot{\varphi} \end{array} \right.$$

e quindi

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} p^2 + q^2 = \dot{\psi}^2 \text{ sen}^2 \Theta + \dot{\Theta}^2 = a_0 - a \text{ cos } \Theta \\ \text{sen } \Theta (p \text{ sen } \varphi + q \text{ cos } \varphi) = \text{sen}^2 \Theta \cdot \dot{\psi} = b_0 - bn \text{ cos } \Theta \\ \dot{\psi} \text{ cos } \Theta + \dot{\varphi} = n \end{array} \right.$$

Eliminando $\dot{\psi}$ fra le prime due delle (72), posto $\text{cos } \Theta = u$, si ottiene

$$(73) \quad \left(\frac{du}{dt} \right)^2 = (a_0 - au) (1 - u^2) - (b_0 - bnu)^2 = f(u).$$

La seconda dà:

$$(74) \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{b_0 - bnu}{1 - u^2}, \text{ e la terza } (75) \quad \frac{d\varphi}{dt} = n - u \frac{b_0 - bnu}{1 - u^2}.$$

La (73) è la *risolvente* del problema del moto del giroscopio pesante. Essendo u_0 il valore iniziale di u , compreso fra -1 ed 1 (poichè $u = \text{cos } \Theta$), se risulta $f(u_0) > 0$, allora la $f(u) = 0$ ha due radici u_1 ed u_2 , comprese negli intervalli $(-1, u_0)$, $(u_0, +1)$, mentre la terza radice è compresa fra $+1$ e $+\infty$. In questo caso, la u , partendo dal valore iniziale u_0 , oscilla fra u_1 ed u_2 . Se supponiamo $u_1 = u_2$ e facciamo $u_0 = u_1 = u_2$, allora u_0 è radice doppia dell'equazione $f(u) = 0$; in questo caso, nell'intervallo $(-1, +1)$ la $f(u)$ è costantemente negativa, fuorchè nel punto $u = u_0$ in cui annulla del 2.º ordine. La u conserva quindi indefinitamente il suo valore iniziale u_0 , cioè Θ conserva un valore costante Θ_0 e l'asse giroscopico Ox descrive un cono di rivoluzione intorno alla verticale OZ . Riferiamoci a quest'ultimo caso e determiniamo le costanti

a_0 e b_0 in modo che la $f(u) = 0$ abbia una radice doppia u_0 . Dovrà aversi:

$$(76) \quad \begin{cases} f(u_0) = (a_0 - a u_0)(1 - u_0^2) - (b_0 - b n u_0)^2 = 0 \\ f'(u_0) = 2 b n (b_0 - b n u_0) - a(1 - u_0^2) - 2 u_0 (a_0 - a u_0) = 0. \end{cases}$$

Quando queste condizioni sono soddisfatte, risulterà

$$(77) \quad \Theta = \Theta_0; \quad \dot{\psi} = \frac{b_0 - b n u_0}{1 - u_0^2} = \text{cost}; \quad \dot{\varphi} = n - u_0 \frac{b_0 - b n u_0}{1 - u_0^2} = \text{cost}, \quad (u_0 = \cos \Theta_0).$$

Indichiamo con ν e ν_1 tali costanti ed avremo, allora:

$$(78) \quad \varphi = \nu(t - t_0), \quad \psi = \nu_1(t - t_0), \quad [\nu = n - u_0 \nu_1].$$

Si ha, quindi, la soluzione particolare delle equazioni di Eulero-Lagrange

$$(79) \quad \begin{cases} \bar{p} = \nu_1 \text{sen} \Theta_0 \text{sen} \varphi, \quad \bar{q} = \nu_1 \text{sen} \Theta_0 \text{cos} \varphi, \quad n = \nu + \nu_1 \text{cos} \Theta_0; \\ \bar{\gamma}_1 = -\bar{\gamma}_1 = \text{sen} \Theta_0 \text{sen} \varphi, \quad \bar{\gamma}_2 = -\bar{\gamma}_2 = \text{sen} \Theta_0 \text{cos} \varphi, \\ \bar{\gamma}_3 = -\bar{\gamma}_3 = \text{cos} \Theta_0 \quad (\text{costante}). \end{cases}$$

In corrispondenza di questa soluzione, le equazioni alle variazioni (60) diventano:

$$(80) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d \xi}{dt} - \frac{A - C}{A} (\nu_1 \text{sen} \Theta_0 \cdot \text{cos} \varphi \cdot \xi + n \eta) + \varepsilon \nu_1 \text{sen} \Theta_0 \text{cos} \varphi &= \\ &= \frac{m g}{A} (-y_0 \text{cos} \Theta_0 - z_0 \varepsilon_y) \\ \frac{d \eta}{dt} + \frac{A - C}{A} (n \xi + \nu_1 \text{sen} \Theta_0 \text{sen} \varphi \cdot \xi) + \varepsilon \nu_1 \text{sen} \Theta_0 \text{sen} \varphi \dot{\varphi} &= \\ &= \frac{m g}{A} (z_0 \varepsilon_x + x_0 \text{cos} \Theta_0) \\ \frac{d \zeta}{dt} = \varepsilon \frac{A}{C} \nu_1^2 \text{sen}^2 \Theta_0 \text{sen} \varphi \text{cos} \varphi + \frac{m g}{C} (-x_0 \text{sen} \Theta_0 \text{cos} \varphi + & \\ &+ y_0 \text{sen} \Theta_0 \text{sen} \varphi) \end{aligned} \right.$$

cioè, assumendo come variabile la φ

$$(81) \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{d\varphi} - \frac{A-C}{Av} (v_1 \operatorname{sen} \Theta_0 \cdot \cos \varphi \cdot \zeta + n\eta) + \\ \quad + \frac{\varepsilon n v_1}{v} \operatorname{sen} \Theta_0 \cdot \cos \varphi = - \frac{mg}{Av} (y_0 \cos \Theta_0 + z_0 \varepsilon_2) \\ \frac{d\eta}{d\varphi} + \frac{A-C}{Av} (n\xi + v_1 \operatorname{sen} \Theta_0 \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \zeta) + \varepsilon v_1 \operatorname{sen} \Theta_0 \cdot \operatorname{sen} \varphi = \\ \quad = \frac{mg}{Av} (z_0 \varepsilon_1 + x_0 \cos \Theta_0) \\ \frac{d\zeta}{d\varphi} = \varepsilon \frac{A}{Cv} v_1^2 \operatorname{sen}^2 \Theta_0 \cdot \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi - \frac{mg}{vC} \operatorname{sen} \Theta_0 \cdot \\ \quad \cdot (x_0 \cos \varphi - y_0 \operatorname{sen} \varphi) . \end{aligned} \right.$$

La terza delle (81) si integra subito e dà, essendo $\varphi = v(t - t_0)$

$$(82) \quad \zeta = \frac{\varepsilon A}{2vC} v_1^2 \operatorname{sen}^2 \Theta_0 \operatorname{sen}^2 \varphi - \frac{mg}{vC} \operatorname{sen} \Theta_0 (x_0 \operatorname{sen} \varphi + \\ + y_0 \cos \varphi) + \zeta_0 .$$

Scriviamo, ora, le altre tre equazioni, relative ad $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ed ε_3 , che si deducono dalle (61)

$$(83) \left\{ \begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{d\varphi} &= \frac{1}{v} (n\varepsilon_2 - \operatorname{sen} \Theta_0 \cdot \cos \varphi \cdot \zeta) - \\ &\quad - \frac{1}{v} (v_1 \operatorname{sen} \Theta_0 \cdot \cos \varphi \cdot \varepsilon_3 - \cos \Theta_0 \cdot \eta) \\ \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi} &= \frac{1}{v} (v_1 \operatorname{sen} \Theta_0 \operatorname{sen} \varphi \cdot \varepsilon_3 \quad \cos \Theta_0 \cdot \xi) - \\ &\quad - \frac{1}{v} (n\varepsilon_1 - \operatorname{sen} \Theta_0 \operatorname{sen} \varphi \cdot \zeta) \\ \frac{d\varepsilon_3}{d\varphi} &= \frac{v_1}{v} \operatorname{sen} \Theta_0 (\cos \varphi \cdot \varepsilon_1 - \operatorname{sen} \varphi \cdot \varepsilon_2) + \\ &\quad + \frac{1}{v} \operatorname{sen} \Theta_0 (\cos \varphi \cdot \xi - \operatorname{sen} \varphi \cdot \eta) . \end{aligned} \right.$$

Trasformiamo gli integrali del problema. L'integrale (62), supposto $\cos \Theta_0 \neq 0$, diventa

$$(84) \quad \varepsilon_3 = - \operatorname{tg} \Theta_0 (\operatorname{sen} \varphi \cdot \varepsilon_1 + \cos \varphi \cdot \varepsilon_2) .$$

Analogamente, l'integrale (64) del momento scalare della quantità di moto, diventa:

$$(85) \quad A \operatorname{sen} \Theta_0 [v_1 (\operatorname{sen} \varphi \cdot \varepsilon_1 + \cos \varphi \cdot \varepsilon_2) - (\operatorname{sen} \varphi \cdot \xi + \cos \varphi \cdot \eta)] + C (n \varepsilon_3 - \cos \Theta_0 \cdot \zeta) + \varepsilon A v_1 \operatorname{sen}^2 \Theta_0 \cos^2 \varphi = \delta K_0 .$$

Infine l'integrale (66) delle forze vive si trasforma nel seguente

$$(86) \quad A v_1 \operatorname{sen} \Theta_0 (\operatorname{sen} \varphi \cdot \xi + \cos \varphi \cdot \eta) + C n \zeta - \frac{1}{2} \varepsilon A v_1^2 \operatorname{sen}^2 \Theta_0 \cos^2 \varphi + m g [\operatorname{sen} \Theta_0 (x_0 \operatorname{sen} \varphi + y_0 \cos \varphi) - z_0 \varepsilon_3] = \delta h .$$

Gli integrali delle aree e delle forze vive permettono di esprimere le quantità $\operatorname{sen} \varphi \cdot \varepsilon_1 + \cos \varphi \cdot \varepsilon_2$ e $\operatorname{sen} \varphi \cdot \xi + \cos \varphi \cdot \eta$ in funzione della già determinata ζ e di ε_3 . Supposto sempre $\Theta_0 \neq 0$, l'integrale delle forze vive porge:

$$(87) \quad M \equiv \operatorname{sen} \varphi \cdot \xi + \cos \varphi \cdot \eta = \frac{1}{A v_1 \operatorname{sen} \Theta_0} \left\{ \delta h - C n \zeta + \frac{1}{2} \varepsilon A v_1^2 \operatorname{sen}^2 \Theta_0 \cos^2 \varphi - m g \left[\operatorname{sen} \Theta_0 (x_0 \operatorname{sen} \varphi + y_0 \cos \varphi) - z_0 \varepsilon_3 \right] \right\} .$$

L'integrale delle aree dà

$$v_1 (\operatorname{sen} \varphi \cdot \varepsilon_1 + \cos \varphi \cdot \varepsilon_2) - (\operatorname{sen} \varphi \cdot \xi + \cos \varphi \cdot \eta) = \frac{1}{A \operatorname{sen} \Theta_0} \left\{ \delta K_0 - \varepsilon A v_1 \operatorname{sen}^2 \Theta_0 \cos^2 \varphi - C (n \varepsilon_3 - \cos \Theta_0 \cdot \zeta) \right\} ;$$

sommando con la precedente e osservando che $v = n - v_1 \cos \Theta_0$ si ricava:

$$(88) \quad P \equiv \operatorname{sen} \varphi \cdot \varepsilon_1 + \cos \varphi \cdot \varepsilon_2 = \frac{1}{A v_1 \operatorname{sen} \Theta_0} \left\{ v_1 \delta K_0 - \frac{1}{2} \varepsilon A v_1^2 \operatorname{sen}^2 \Theta_0 \cos^2 \varphi - C (n v_1 \varepsilon_3 + v \zeta) + \delta h - m g \left[\operatorname{sen} \Theta_0 (x_0 \operatorname{sen} \varphi + y_0 \cos \varphi) - z_0 \varepsilon_3 \right] \right\} .$$

Dalle prime due delle (83) si ricava

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\varphi} \cos \varphi - \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi} \operatorname{sen} \varphi = \frac{n}{v} (\varepsilon_1 \operatorname{sen} \varphi + \varepsilon_2 \cos \varphi) - \frac{\operatorname{sen} \Theta_0}{v} \zeta - \frac{v_1}{v} \operatorname{sen} \Theta_0 \cdot \varepsilon_3 + \frac{\cos \Theta_0}{v} (\xi \operatorname{sen} \varphi + \eta \cos \varphi)$$

ovvero

$$(89) \quad \frac{d}{d\varphi} (\varepsilon_1 \cos \varphi - \varepsilon_2 \sin \varphi) = \left(\frac{n}{\nu} - 1 \right) (\varepsilon_1 \sin \varphi + \varepsilon_2 \cos \varphi) + \\ + \frac{\cos \Theta_0}{\nu} (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) - \frac{\sin \Theta_0}{\nu} (\zeta + \nu_1 \varepsilon_3).$$

Analogamente, dalle prime due delle (81), si ricava:

$$(90) \quad \frac{d}{d\varphi} (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) = \left(\frac{(A-C)n}{A\nu} - 1 \right) (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) + \\ + \frac{A-C}{A\nu} \nu_1 \sin \Theta_0 \cdot \frac{\zeta}{\nu} - \frac{\varepsilon n \nu_1}{\nu} \sin \Theta_0 \cos^2 \varphi + \varepsilon \nu_1 \sin \Theta_0 \sin^2 \varphi - \\ - \frac{mg}{A\nu} \cos \Theta_0 (x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi) - \frac{mg}{A\nu} z_0 (\varepsilon_1 \sin \varphi + \varepsilon_2 \cos \varphi).$$

Cioè, avendo posto per semplicità

$$M = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi \qquad P = \varepsilon_1 \sin \varphi + \varepsilon_2 \cos \varphi \\ N = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi \qquad Q = \varepsilon_1 \cos \varphi - \varepsilon_2 \sin \varphi,$$

si ha

$$(91) \quad \frac{dQ}{d\varphi} = \frac{n-\nu}{\nu} P + \frac{\cos \Theta_0}{\nu} M - \frac{\sin \Theta_0}{\nu} (\zeta + \nu_1 \varepsilon_3)$$

$$(92) \quad \frac{dN}{d\varphi} = \frac{(A-C)n - A\nu}{A\nu} M + \frac{A-C}{A\nu} \nu_1 \sin \Theta_0 \cdot \frac{\zeta}{\nu} - \\ - \frac{\varepsilon n \nu_1}{\nu} \sin \Theta_0 \cos^2 \varphi + \varepsilon \nu_1 \sin \Theta_0 \sin^2 \varphi - \\ - \frac{mg}{A\nu} \cos \Theta_0 (x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi) - \frac{mg}{A\nu} z_0 P.$$

Moltiplicando la prima delle (83) per $\sin \varphi$ e la seconda per $\cos \varphi$ e sommando, si ha, con facili passaggi:

$$(93) \quad \frac{dP}{d\varphi} = -\frac{\cos \Theta_0}{\nu} (N + \nu_1 Q).$$

Analogamente, dalle prime due delle (81) si ricava:

$$(94) \quad \frac{dM}{d\varphi} = \frac{A\nu - (A-C)n}{A\nu} N - \frac{mg}{A\nu} z_0 Q = \\ = \frac{mg}{A\nu} \cos \Theta_0 (x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi) - \frac{\varepsilon \nu_1}{\nu} (n + \nu) \sin \Theta_0 \sin \varphi \cos \varphi,$$

e quello (86) delle forze vive

$$(99) \quad A v_1 \operatorname{sen} \Theta_0 \cdot M + C n \zeta - \frac{1}{2} \varepsilon A v_1^2 \operatorname{sen}^2 \Theta_0 \cos^2 \varphi + \\ + mg [\operatorname{sen} \Theta_0 (x_0 \operatorname{sen} \varphi + y_0 \cos \varphi) - z_0 \varepsilon_3] = \delta h .$$

Eliminando ε_3 per mezzo della (96), abbiamo

$$(100) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A v_1 \operatorname{sen} \Theta_0 - C n \operatorname{tg} \Theta_0) P - A \operatorname{sen} \Theta_0 \cdot M = \delta K_0 + C \cos \Theta_0 \cdot \zeta - \\ \quad - \varepsilon A v_1 \operatorname{sen}^2 \Theta_0 \cos^2 \varphi , \\ A v_1 \operatorname{sen} \Theta_0 \cdot M + mg z_0 \operatorname{tg} \Theta_0 \cdot P = \delta h + \\ \quad + \frac{1}{2} \varepsilon A v_1^2 \operatorname{sen}^2 \Theta_0 \cos^2 \varphi - C n \zeta - mg \operatorname{sen} \Theta_0 (x_0 \operatorname{sen} \varphi + \\ \quad + y_0 \cos \varphi) . \end{array} \right.$$

Eliminando M fra queste due e tenendo conto del valore trovato per ζ , si ha

$$(101) \quad [A v_1^2 \operatorname{sen} \Theta_0 + (mg z_0 - C n v_1) \operatorname{tg} \Theta_0] P = v_1 \delta K_0 + \delta h - \\ - \frac{1}{2} \varepsilon A v_1^2 \operatorname{sen}^2 \Theta_0 - C v \zeta_0 ,$$

cioè P risulta costante e, di conseguenza, risulta costante anche ε_3 .
Quindi

$$(102) \quad P = \frac{v_1 \delta K_0 + \delta h - \frac{1}{2} \varepsilon A v_1^2 \operatorname{sen}^2 \Theta_0 - C v \zeta_0}{A v_1^2 \operatorname{sen} \Theta_0 + (mg z_0 - C n v_1) \operatorname{tg} \Theta_0} , (\text{costante}) ;$$

$$\varepsilon_3 = -P \operatorname{tg} \Theta_0 = - \frac{v_1 \delta K_0 + \delta h - \frac{1}{2} \varepsilon A v_1^2 \operatorname{sen}^2 \Theta_0 - C v \zeta_0}{A v_1^2 \cos \Theta_0 + (mg z_0 - C n v_1)} , \text{ cioè}$$

$$(103) \quad \varepsilon_3 = - \frac{v_1 \delta K_0 + \delta h - C v \zeta_0 - \frac{1}{2} \varepsilon A v_1^2 \operatorname{sen}^2 \Theta_0}{v_1 [A(n - v) - C n] + mg z_0} .$$

Calcolando, poi, M , si ricava

$$(104) \quad M = \frac{\delta h - C n \zeta_0 + mg z_0 \varepsilon_3}{A v_1 \operatorname{sen} \Theta_0} + \frac{1}{2} \varepsilon v_1 \operatorname{sen} \Theta_0 - \\ - \frac{1}{2} \frac{n + v}{v} \varepsilon v_1 \operatorname{sen} \Theta_0 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi + \frac{n - v}{v} \frac{mg}{A v_1} (x_0 \operatorname{sen} \varphi + y_0 \cos \varphi) .$$

Dopo ciò, abbiamo N (oppure Q) con una quadratura. Dalla terza delle (95), essendo $\frac{dP}{d\varphi} = 0$, si ricava

$$(105) \quad Q = -\frac{1}{v_1} N.$$

Ricaviamo, ora, Q con una quadratura dalla (97) nella quale sono già noti M , P e ζ . Abbiamo:

$$(106) \quad Q = \left\{ \frac{\delta h - C n \zeta_0 + m g z_0 \varepsilon_3}{A v v_1 \operatorname{tg} \Theta_0} + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{v_1}{v} \operatorname{sen} \Theta_0 \cos \Theta_0 + \right. \\ \left. + \frac{v_1}{v} \frac{P}{\cos \Theta_0} - \frac{\operatorname{sen} \Theta_0}{v} \zeta_0 - \frac{1}{4} \varepsilon \frac{v_1^2}{v^2} \operatorname{sen} \Theta_0 \left(\frac{n+v}{v_1} \cos \Theta_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{A}{C} \operatorname{sen}^2 \Theta_0 \right) \left(\varphi + \frac{1}{4} \varepsilon \frac{v_1^2}{v^2} \operatorname{sen} \Theta_0 \left(\frac{n+v}{v_1} \cos \Theta_0 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{A}{C} \operatorname{sen}^2 \Theta_0 \right) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi - \frac{m g}{A v^2} \left(\cos \Theta_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{A}{C} \operatorname{sen}^2 \Theta_0 \right) (x_0 \cos \varphi - y_0 \operatorname{sen} \varphi) + Q_0 \right.$$

Convien porre per semplicità

$$(107) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\delta h - C n \zeta_0 + m g z_0 \varepsilon_3}{A v v_1 \operatorname{tg} \Theta_0} + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{v_1}{v} \operatorname{sen} \Theta_0 \cos \Theta_0 + \\ &\quad + \frac{v_1}{v} \frac{P}{\cos \Theta_0} - \frac{\operatorname{sen} \Theta_0}{v} \zeta_0 \\ \beta_0 &= \frac{1}{2} \varepsilon \frac{v_1^2}{v^2} \operatorname{sen} \Theta_0 \left[\frac{n+v}{v_1} \cos \Theta_0 + \frac{A}{C} \operatorname{sen}^2 \Theta_0 \right] \\ \gamma_0 &= \frac{m g}{A v^2} \left(\cos^2 \Theta_0 + \frac{A}{C} \operatorname{sen}^2 \Theta_0 \right). \end{aligned} \right.$$

Allora

$$(108) \quad \frac{dQ}{d\varphi} = \alpha_0 - \beta_0 \operatorname{sen}^2 \varphi + \gamma_0 (x_0 \operatorname{sen} \varphi + y_0 \cos \varphi),$$

$$(109) \quad Q = (\alpha_0 - \frac{1}{2} \beta_0) \varphi + \beta_0 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi - \gamma_0 (x_0 \cos \varphi - y_0 \operatorname{sen} \varphi) + Q_0,$$

e, quindi, essendo $N = -v_1 Q$, le quantità M , N , P , Q sono tutte determinate. La Q e la N restano sempre piccole se le condizioni di moto iniziali sono tali per cui

$$(110) \quad \alpha_0 - \frac{1}{2} \beta_0 = 0.$$

Dai valori di α_0 e ζ_0 si vede che la *stabilità* del moto dipende dalle costanti di frequenza ν e ν_1 , dal valore di Θ_0 da z_0 e da ε ; essa è indipendente da x_0 e y_0 , cioè dallo spostamento del baricentro. Per $\varepsilon = 0$, è $\beta_0 = 0$ e la condizione di stabilità si riduce ad $\alpha_0 = 0$, che, in questo caso, diventa

$$(111) \left\{ \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\delta h - C n \zeta_0 + m g z_0 \varepsilon_3}{A \nu \nu_1 \operatorname{tg}(\Theta_0)} + \frac{\nu_1}{\nu} \frac{P}{\cos(\Theta_0)} - \frac{\operatorname{sen}(\Theta_0)}{\nu} \zeta_0 = 0, \text{ con} \\ \varepsilon_3 &= - \frac{\nu_1 \delta K_0 + \delta h - C \nu \zeta_0}{\nu_1 [(A - C) n - A \nu] + m g z_0} \end{aligned} \right.$$

§ 5. - Le formule ottenute nel paragrafo precedente cadono in difetto nel caso in cui sia $\Theta_0 = 0$. Consideriamo tale caso particolare. Le equazioni alle variazioni (81) e (83) diventano

$$(112) \left\{ \begin{aligned} \frac{d \xi}{d \varphi} - \frac{A - C}{A \nu} n \eta &= \frac{m g}{A \nu} (y_0 + z_0 \varepsilon_2) \\ \frac{d \eta}{d \varphi} + \frac{A - C}{A \nu} n \xi &= \frac{m g}{A \nu} (z_0 \varepsilon_1 + x_0) \\ \frac{d \zeta}{d \varphi} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d \varepsilon_1}{d \varphi} &= \frac{n}{\nu} \varepsilon_2 + \frac{1}{\nu} \eta \\ \frac{d \varepsilon_2}{d \varphi} &= - \frac{1}{\nu} \xi - \frac{n}{\nu} \varepsilon_1 \\ \frac{d \varepsilon_3}{d \varphi} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Giova, intanto, osservare che queste equazioni sono indipendenti da ε , quindi per $\Theta_0 = 0$, la perturbazione dovuta alla differenza $A - B$ non ha influenza

Le equazioni in questione sono, poi, equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Le ultime dei due gruppi porgono rispettivamente

$$(113) \quad \zeta = \text{cost} \quad \text{ed} \quad \varepsilon_3 = \text{cost}.$$

Poniamo per semplicità

$$(114) \quad \frac{A - C}{A} \cdot \frac{n}{\nu} = \sigma; \quad \frac{m g z_0}{A \nu} = \omega; \quad \frac{m g x_0}{A \nu} = \lambda; \quad \frac{m g y_0}{A \nu} = -\mu.$$

Le prime quattro dei due gruppi di equazioni (112) diventano, allora

$$(115) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\zeta}{d\varphi} - \tau \eta = -(\mu + \omega \varepsilon_2), \quad \frac{d\varepsilon_1}{d\varphi} = \frac{1}{\nu} (n \varepsilon_2 + \eta), \\ \frac{d\eta}{d\varphi} + \tau \zeta = \omega \varepsilon_1 + \lambda, \quad \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi} = -\frac{1}{\nu} (n \varepsilon_1 + \zeta). \end{array} \right.$$

Il sistema di equazioni (115) fornisce soluzioni della forma

$$(116) \quad \zeta = \zeta_0 e^{\frac{u\varphi}{\nu}} + C_1, \quad \eta = \eta_0 e^{\frac{u\varphi}{\nu}} + C_2, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{10} e^{\frac{u\varphi}{\nu}} + C_3, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{20} e^{\frac{u\varphi}{\nu}} + C_4.$$

Sostituendo, si ha:

$$(117) \left\{ \begin{array}{l} (\zeta_0 u - \tau \eta_0 + \omega \varepsilon_{20}) e^{\frac{u\varphi}{\nu}} - \tau C_2 + \omega C_4 = -\mu; \quad (\varepsilon_{10} u - \\ \quad - \frac{n}{\nu} \varepsilon_{20} - \frac{1}{\nu} \eta_0) e^{\frac{u\varphi}{\nu}} - \frac{n}{\nu} C_4 - \frac{1}{\nu} C_2 = 0; \\ (\eta_0 u + \tau \zeta_0 - \omega \varepsilon_{10}) e^{\frac{u\varphi}{\nu}} + \tau C_1 - \omega C_3 = \lambda; \quad (\varepsilon_{20} u + \\ \quad + \frac{n}{\nu} \varepsilon_{10} + \frac{1}{\nu} \zeta_0) e^{\frac{u\varphi}{\nu}} + \frac{n}{\nu} C_3 + \frac{1}{\nu} C_1 = 0; \end{array} \right.$$

da cui

$$(118) \left\{ \begin{array}{l} \zeta_0 u - \tau \eta_0 + \omega \varepsilon_{20} = 0 \\ \eta_0 u + \tau \zeta_0 - \omega \varepsilon_{10} = 0 \\ \varepsilon_{10} u - \frac{n}{\nu} \varepsilon_{20} - \frac{1}{\nu} \eta_0 = 0 \\ \varepsilon_{20} u + \frac{n}{\nu} \varepsilon_{10} + \frac{1}{\nu} \zeta_0 = 0 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau C_2 + \omega C_4 = -\mu \\ \tau C_1 - \omega C_3 = \lambda \\ \frac{n}{\nu} C_4 + \frac{1}{\nu} C_2 = 0 \\ \frac{n}{\nu} C_3 + \frac{1}{\nu} C_1 = 0 \end{array} \right. \quad \text{cioè} \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{n\lambda}{\omega + \tau n} \\ C_2 = \frac{n\mu}{\omega + \tau n} \\ C_3 = -\frac{\lambda}{\omega + \tau n} \\ C_4 = -\frac{\mu}{\omega + \tau n} \end{array} \right.$$

Dev'essere, poi, per la coesistenza del primo gruppo di equazioni (118):

$$(119) \quad \Delta = \begin{vmatrix} u & -\tau & 0 & \omega \\ \tau & u & -\omega & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\nu} & u & -\frac{n}{\nu} \\ \frac{1}{\nu} & 0 & \frac{n}{\nu} & u \end{vmatrix} = 0$$

cioè, sviluppando il determinante

$$(120) \quad u^4 + \left(\frac{n^2}{\nu^2} - \frac{2\omega}{\nu} + \tau^2 \right) u^2 + \frac{(\tau n + \omega)^2}{\nu^2} = 0.$$

Per la stabilità del moto, le radici della (120), considerata come equazione di 2° grado in u^2 , devono essere negative. Pertanto dovranno risultare positivi il coefficiente medio e il discriminante della (120), cioè

$$n^2 - 2\omega\nu + \tau^2\nu^2 > 0, \quad \frac{1}{\nu^2} (n + \nu\tau)^2 [(n - n\tau)^2 - 4\omega\nu] > 0.$$

Posto $\frac{A - C}{A} = \varepsilon_0$, la prima di queste condizioni implica che sia

$$(121) \quad \omega < \frac{n^2(1 + \varepsilon_0^2)}{2\nu}, \quad \text{cioè} \quad \frac{mgz_0}{A} < \frac{n^2(1 + \varepsilon_0^2)}{2}.$$

La seconda è soddisfatta per

$$(122) \quad \frac{mgz_0}{A} < \frac{n^2(1 - \varepsilon_0)^2}{4}.$$

Ma delle due quantità

$$\frac{1 + \varepsilon_0^2}{2} \quad \text{e} \quad \frac{(1 - \varepsilon_0)^2}{4} \quad \text{è} \quad \frac{1 + \varepsilon_0^2}{2} > \frac{(1 - \varepsilon_0)^2}{4}$$

percì, per la stabilità del moto, basta che sia

$$(123) \quad \frac{mgz_0}{A} < \frac{(1 - \varepsilon_0)^2 n^2}{4}$$

Come si vede, la stabilità dipende dal peso del corpo, da z_0 e da n , cioè dalla velocità angolare di rotazione intorno all'asse z ; la stabilità cresce con n ed è invece, indipendente da x_0 e y_0 , cioè dalla dissimmetria del baricentro, nonchè da ε , cioè dallo squilibrio dovuto alla differenza dei momenti d'inerzia A e B .

Modena, Istituto matematico della R. Università, 12 ottobre 1945.

Le dimensioni delle grandezze elettriche e magnetiche nei vari sistemi

Le due tabelle espongono le dimensioni delle grandezze elettriche e di quelle magnetiche nei più importanti sistemi.

Si premettono alcune norme generali.

a) Nel sistema elettrostatico classico, si sceglie come punto di partenza la formola coulombiana nella forma classica $F = \pm \frac{qq'}{d^2}$ [ovvero $F = \pm \frac{1}{\varepsilon} \frac{qq'}{d^2}$ ponendo $\varepsilon =$ numero puro] dalla quale si ricavano le dimensioni della carica elettrica. Da queste si ricavano quelle delle altre grandezze elettriche in base alle relazioni generali valevoli in tutti i sistemi (1).

b) Nel sistema elettromagnetico classico, che storicamente precede quello elettrostatico, si sceglie la formola coulombiana usata da Gauss $F = \pm \frac{mm'}{d^2}$ [che, analogamente a quella dell'elettrostatica, oggi si scrive considerando il coefficiente cioè: $F = \pm \frac{1}{\mu} \frac{mm'}{d^2}$ e ponendo in questo caso $\mu =$ numero puro]. Da questa si ricavano le dimensioni di massa magnetica e da queste si ricavano quelle delle altre grandezze magnetiche, in base alle relazioni generali valevoli in tutti i sistemi (1).

c) Le dimensioni delle grandezze magnetiche nel sistema elettrostatico si possono ricavare da quelle delle grandezze elettriche in base alle relazioni fondamentali che collegano le grandezze elettriche a quelle magnetiche, nelle quali si consideri la costante c come un numero puro.

P. es. ricorrendo alla formola di Laplace, ponendovi per i le dimensioni già trovate nel sistema e. s. si ricavano quelle di m pure nel sistema e. s.

(1) Vedi nella colonna « Osservazioni » delle tavole.

Si può anche ricorrere alle equazioni circuitali dell'elettromagnetismo, nelle quali, sempre considerando c un numero puro, si identifica, dimensionalmente:

int. di corrente con forza magnetomotrice
e f. e. m. con variazione di flusso magnetico.

Analogamente si ricavano le dimensioni delle grandezze elettriche nel sistema e. m. (1).

d) Oltre ai sistemi e. s. ed e. m. classici, si vedono citati nei trattati anche il sistema di Gauss - Hertz e quelli e. s. ed e. m. generalizzati (2).

Di questi ultimi, quello proposto dal Rücker (3) indica sia nelle formule fondamentali sia in quelle derivate le dimensioni sopresse ε e μ . In esso basta sopprimere le dimensioni di ε (in quello e. s.) o di μ (in quello e. m.) per ritrovare le formule dimensionali dei sistemi e. s. ed e. m. classici.

Quello più completo, proposto dal Cohn (4) e riferito nelle tavole, indica le dimensioni di ε e c (in quello e. s.) e di μ e c (in quello e. m.).

- I. { Sopprimendo le dimensioni di ε e c in quello e. s. si ritrovano le dimensioni del sistema e. s. classico.
Sopprimendo le dimensioni di μ e c in quello e. m. si ritrovano le dimensioni del sistema e. m. classico.
- II. { Sopprimendo nel sistema e. s. general. le dimensioni di ε e attribuendo a c le dimensioni LT^{-1} si ottengono le dimensioni della stessa grandezza nel sistema di Gauss-Hertz.
Sopprimendo nel sistema e. m. generalizzato le dimensioni di μ e attribuendo a c le dimensioni LT^{-1} si ottengono le dimensioni della stessa grandezza nel sistema di Gauss-Hertz.

(1) Vedi le relazioni citate nel « Trattato » di Maxwell al § 623.

Così pure, si possono avere le dimensioni di i nel sistema e. m. in base alla relazione amperiana relativa alla forza agente fra conduttori percorsi da corrente, per cui, ritenendo numero puro la costante che vi compare, è dimensionalmente $[i^2] = [\text{forza}]$.

È pure possibile avere le dimensioni di carica el. nel sistema e. m. in base alla solita formula coulombiana in cui però per ε si pongano le dimensioni $[L^{-2} T^2]$. Analogo procedimento può farsi per avere le dimensioni di polo m. nel sistema e. s.

(2) G. MAYR, *I sistemi assoluti di unità elettriche*. « Atti della Soc. Nat. e Mat. di Modena », vol. LXXIV, pagg. 60-68.

(3) RÜCKER, *Suppressed dimensions*, Phil. Mag. 27, 1889, pag. 104.

(4) COHN-LORETZ, *Maxwell's Elektrom. Theorie*. « Encicl. der Math.-Wissensch. », 1904-1922, Bd. 5, pag. 70-89.

- III. { Attribuendo, in questi sistemi, a c le dimensioni $[L T^{-1} \epsilon^{1/2} \mu^{1/2}]$, le quali risultano dalla nota relazione dimensionale $\left[\frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \right] = [L T^{-1}]$ le dimensioni di una stessa grandezza nel sistema e. s. generalizzate e nel sistema e. m. generalizzato coincidono.
- IV. { Sostituendo, nel sistema e. s. general. a ϵ le dimensioni $[L^{-2} T^2 \mu^{-1} c^2]$ si hanno quelle della stessa grandezza nel sistema e. m. general. — Analogamente si passa dall'e. m. all'e. s. generalizzato sostituendo a μ le dimensioni $[L^{-2} T^2 \epsilon^{-1} c^2]$.

e) È noto che la costante « c » è il rapporto fra misura e. s. e misura e. m. della carica elettrica. Importa tener presente che il rapporto fra le dimensioni di una stessa grandezza espressa in misura e. s. e quelle della stessa espressa in misura e. m. è dato da potenze di c .

Precisamente:

c per: carica el.; int. di corrente; spost. elett. (induzione el); flusso del vettore D ; forza magnetica (H); flusso magn. (del vettore H); forza magnetomotrice (potenz. magn.)

c^{-1} per: forza e. m.; forza elett.; flusso di forza elett. (del vettore E); massa magn.; mom. magn.; intens. di magnetiz. e induzione magn.; flusso magn. (del vettore B); potenza d'una lamina.

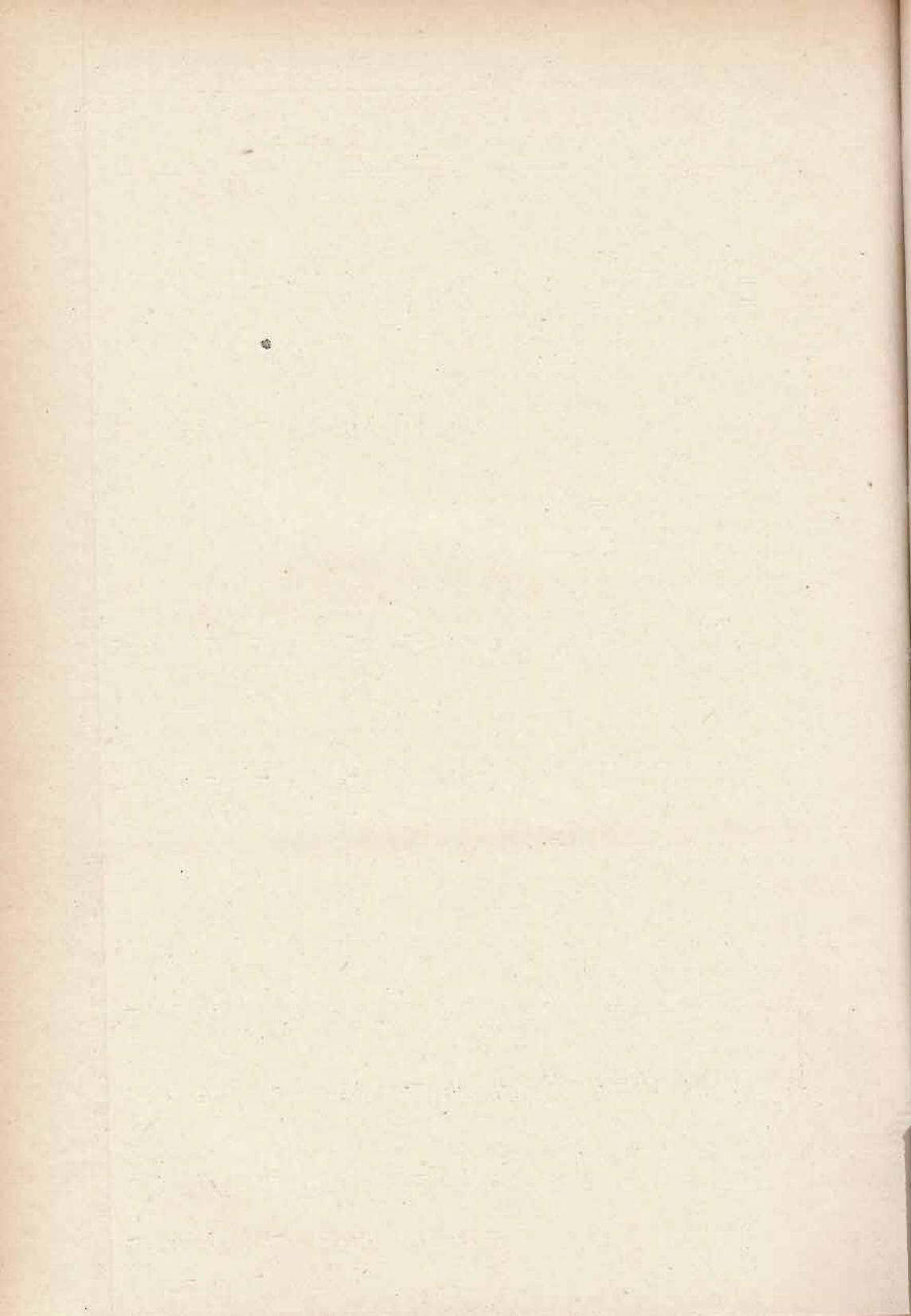
c^2 per: capacità el.; conduttanza; conduttività; cost. dielettrica; reluttanza reluttività.

c^{-2} per: res. elett.; resistività; induttanza; permeanza; permeabilità.

f) Le unità del sistema pratico, comunemente detto anche industriale, sono, in generale, di origine e. m. In molti testi, per consuetudine, si esprimono come multipli o sottomultipli delle corrispondenti unità *c. g. s.* (del sistema e. s. o di quello e. m.). Per questa ragione, ed anche per interesse storico, questi dati sono riferiti nelle tavole. È però da notarsi che tali dati oggi non si possono ritenere più precisi: p. es. l'ohm si deve ritenere definito in base al campione metallico di Washington, e anche se lo si ritenesse eguale a 10^9 u. e. m. non si può considerarlo esattamente eguale a $\frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$ un. e. s. in quanto c non è $3,10^{10}$ cm/sec ma un po' minore.

g) Le dimensioni delle unità Giorgi, espresse in funzione di $[Q]$; $[A]$; $[V]$ si potrebbero esprimere in funzione di $[L]$; $[M]$; $[T]$; $[R]$

GRANDEZZE MAGNETICHE	Espressioni dimensionali nei sistemi:					Unità inizialmente adottate per costituire il sistema industriale	SISTEMA GIORGI		OSSERVAZIONI
	Elettrostatico classico	Elettromagnetico classico	di Gauss-Hertz	Elettrostatico generalizzato (espresso con ϵ e c)	Elettromagnetico generalizzato (espresso con μ e c)		Unità	Dimensioni	
Quantità di magnetismo = massa magnetica = polo magnetico = m (ente fittizio)	$L^{1/2} M^{1/2}$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$	$L^{1/2} M^{1/2} \epsilon^{-1/2} C$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1} \mu^{1/2}$		weber	[VT]	<p>Il modo di ricavarne le dimensioni è indicato in b). In tutti i sistemi le sue dimensioni sono eguali a quelle di B-L².</p> <p>Nei sistemi razionalizzati l'unità di polo si identifica con l'unità di flusso magn. perchè si considera polo unitario quello che emette il flusso unitario. Invece nei sistemi non razionalizzati (p. es. nei c. g. s. classici) queste unità non si identificano, perchè in essi il polo unitario emette un flusso 4π; è cioè eguale a 4π maxwell. (2)</p>
Momento magnetico = $m \cdot L$	$L^{3/2} M^{1/2}$	$L^{5/2} M^{1/2} T^{-1}$	$L^{5/2} M^{1/2} T^{-1}$	$L^{3/2} M^{1/2} \epsilon^{-1/2} C$	$L^{5/2} M^{1/2} T^{-1} \mu^{1/2}$		weber - m	[VTL]	
(Dens. sup. ^{1a} di magn. = m/L^2) » spaziale di » = m/L^3)									<p>Le dimensioni di momento m. in tutti i sistemi sono date da polo L.</p> <p>L'unità cgs di momento è: un, cgs, polo - cm. cioè 4π maxwell - cm. (Nel sist. e. m. class. le dimens. di momento si potrebbero ricavare anche da $\frac{e^2 \omega a^3}{3}$ dove e è la carica dell'elettrone, ω la sua vel ang e a il raggio dell'orbita).</p>
Forza magnetica (vettore H del campo magn.)	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-2}$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}$	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-2} \epsilon^{1/2} C^{-1}$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1} \mu^{-1/2}$	gauss = oersted	amp spira/m	[IL ⁻¹ s]	
Induzione magnetica $B = \mu H$	$L^{-3/2} M^{1/2}$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}$	$L^{-3/2} M^{1/2} \epsilon^{-1/2} C$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1} \mu^{1/2}$	gauss	weber/m ²	[VTL ⁻²]	<p>Essendo la forza che si esercita sull'unità di polo, se ne hanno le dimensioni dividendo quelle di forza (meccanica) per quelle di m.</p> <p>L'unità e. m. c. g. s. fu per molto tempo chiamata gauss, come l'unità di B. Recentemente venne limitato a quest'ultima il nome di gauss, e all'unità di H venne dato il nome di oersted.</p>
Intensità di magnetizzazione = I (= momento/vol = m/L^3) omogenea con B									
Flusso magnetico = Φ									<p>I è, in tutti i sistemi, omogenea con B. L'unità di I è la stessa usata per B, cioè il weber/m² nei sistemi razionalizzati. Invece nei sistemi non razionalizzati l'unità di I è 4π volte l'unità di B.</p>
Flusso del vettore $B = B - L^2$	$L^{1/2} M^{1/2}$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$	$L^{1/2} M^{1/2} \epsilon^{-1/2} C$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1} \mu^{1/2}$	maxwell = = gauss - cm ²	weber	[VT ⁻¹ s]	
Flusso del vettore $H = H - L^2$	$L^{5/2} M^{1/2} T^{-2}$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$	$L^{5/2} M^{1/2} T^{-2} \epsilon^{1/2} C^{-1}$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1} \mu^{-1/2}$				<p>Nei sistemi e. m. class. e di Gauss, essendo H omogenea con B, il flusso di H è omogeneo con quello di B. Negli altri sistemi come in quello del Giorgi, non essendo omogenei H e B i loro flussi non coincidono. Si considera, come flusso magnetico, il flusso di B. Vi è fra i tecnici la tendenza a non considerare Φ come integrale di superficie, ma a scegliere come punto di partenza Φ misurato col flussometro e considerare B come densità di flusso.</p>
Forza magnetomotrice = = Potenziale magnetico	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}$	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-2} \epsilon^{1/2} C^{-1}$	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1} \mu^{1/2}$	gilbert = = gauss - cm	amp-spira	[ls]	<p>Si intende il potenziale di H. Le dimensioni, in tutti i sistemi, si hanno moltiplicando quello di H per L; ed anche come [energia] / [polo].</p>
Potenza d'una lamina	$L^{-1/2} M^{1/2}$	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$	$L^{-1/2} M^{1/2} \epsilon^{-1/2} C$	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1} \mu^{1/2}$				
Reluttanza	$L T^{-2}$	L^{-1}	L^{-1}	$L T^{-2} \epsilon C^{-2}$	$L^{-1} \mu^{-1}$	oersted	henry ⁻¹	[R ⁻¹ T ⁻¹]	Reluttanza è $\frac{f. m. m.}{\text{flusso}}$
Reluttività = $\frac{1}{\mu}$ = reluttanza - L	$L^2 T^{-2}$	numero	numero	$L^2 T^{-2} \epsilon C^{-2}$	μ^{-1}		henry ⁻¹ - m	[R ⁻¹ T ⁻¹ L]	La reluttività è la reluttanza specifica, cioè reluttanza - L.
Permeanza	$L^{-1} T^2$	L	L	$L^{-1} T^2 \epsilon^{-1} C^2$	L μ		henry (od anche henry/spira ²)	[RT] (od anche [RTs ⁻²])	La permeanza è il reciproco di reluttanza, cioè $\frac{\text{flusso}}{f. m. m.}$
Permeabilità μ = coefficiente di magnetizzazione = permeanza specifica	$L^{-2} T^2$	numero	numero	$L^{-2} T^2 \epsilon^{-1} C^2$	μ		henry/m (od anche henry/m. spira ²)	[RTL ⁻¹] (od anche [RTL ⁻¹ s ⁻²])	La permeabilità è il reciproco di reluttività. Nel sistema Giorgi (2), il valore di questa costante relativa allo spazio etere è $\mu = 1.25607 \cdot 10^{-6} \frac{\text{henry}}{m}$
Suscettività = $\frac{1}{H}$ (omogenea con μ)									La permeab - forza magn ² = dens. d'energia.



I rapporti fra le unità Giorgi e quelle *c. g. s.* si possono dedurre in base ai valori dei rapporti fra unità intern. e assolute (1)

$$\frac{\text{amp. int.}}{\text{amp. teor.}} = 0,99993 \pm 0,00003 ; \quad \frac{\text{volt int.}}{\text{volt teor.}} = 1,00038 \pm 0,00003$$

$$\frac{\text{ohm. int.}}{\text{ohm. teor.}} = 1,00045 \pm 0,00002$$

(1) LOMBARDI, « Rend. Lincei », 1933, vol. XVII, pag. 342.

(2) (Vedi tavole) GIORGI. *Le unità elettriche*. « Boll. Radiotel. R. Esercito », vol. 13 N. 4-5, pag. 130-141; vol. 14, N. 1-2, pag. 1-32, 1935.

N. B. — Le determinazioni di costanti o rapporti posteriori a quelli citati in (1) e (2) danno luogo a varianti di minima entità.

Il principio di Heisenberg come principio di atomicità cronotopica

SUNTO: Valendosi ancora una volta delle lunghezze d'onda associate di De Broglie, delle quali in precedenti note aveva già mostrato alcuni caratteri, diciamo così, di concretezza fisica, l'A. mostra ora come al principio di Heisenberg (pur conservandogli il suo valore probabilistico) possa darsi un'espressione matematica, che permette di interpretarlo come dimostrazione dell'esistenza di un unico atomo del mondo cronotopico, di ipervolume: $\sim \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4$ (dove: $\lambda_1 = \hbar / m \dot{x}_1 = \hbar / m \dot{x}$; $\lambda_2 = \hbar / m \dot{x}_2 = \hbar / m \dot{y}$; $\lambda_3 = \hbar / m \dot{x}_3 = \frac{\hbar}{m z}$; $\lambda_4 = \hbar / m \dot{x}_4 = \hbar / m c$); le proprietà (tridimensionali) dei vari corpuscoli elementari non sarebbero, così, che vari aspetti delle sue sezioni (varie per le sue varie, possibili deformazioni) nell'iperpiano spaziale. Nel corso della nota viene poi introdotta una nuova grandezza quadrimensionale, la « vehomassa », che è una invariante e che precisa quantitativamente il concetto di corpuscolo-orbita, già introdotto dall'A. in una precedente nota. L'atomo quadrimensionale ha vehomassa: $\sim \hbar / c$.

§ 1. - Si pensi ad un corpicciuolo (del mondo tridimensionale), di forma sconosciuta ed eventualmente variabile, del quale si sappia soltanto che il suo volume è v_3 . Qualora noi volessimo fare *astrazione da ogni ipotesi modellistica* e volessimo determinare, d'altronde, la posizione nello spazio di questo corpicciuolo, *riguardato come un punto*, verremmo ad avere una *incertezza* (o « indeterminazione », che dir si voglia) nella valutazione delle sue coordinate. Se ad esempio si adoperasse un sistema di coordinate cartesiane, indicando con Δx , Δy , Δz (o Δx_1 , Δx_2 , Δx_3) le incertezze nelle determinazioni delle coordinate x , y , z (o x_1 , x_2 , x_3), avremmo:

$$(1) \quad \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z > v_3 \quad ; \quad (1') \quad \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3 > v_3 .$$

Ma noi sappiamo che il mondo fisico è *cronotopico*; anzi, a ben pensarci, le vere realtà di questo « *welt* » non possono essere le comuni grandezze (eccettuata la carica elettrica), alle quali, per inerzia mentale, diamo ancora una così grande importanza. Basti pensare, del resto, che lunghezze, tempi, masse, energie, ... non sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz e che, perciò, possiamo dire, hanno soltanto *valore soggettivo*, diverso da osservatore a osservatore, e non oggettivo; queste grandezze, insomma, non hanno un vero valore intrinseco, ma sono piuttosto apparenze, come a dire sezioni della realtà. Per una più giusta valutazione della realtà fisica dovremmo dunque considerare, di preferenza, grandezze quadridimensionali, e possibilmente grandezze quadridimensionali invarianti.

Ma lasciando da parte, almeno per ora, tale questione, sulla quale potrò eventualmente tornare con altra nota, e osservando soltanto che il vero mondo fisico è cronotopico, passiamo ora a mostrare come le celebri relazioni di incertezza (o, come molti dicono, di indeterminazione) di Heisenberg possano riguardarsi come espressioni dell'esistenza di un unico atomo cronotopico.

§ 2. - Prima di tutto introduciamo un'altra grandezza del mondo quadridimensionale, μ_s , definita dalla relazione:

$$(2) \quad \mu_s = \int m(s) \cdot ds = \int m[s(t)] \frac{ds}{dt} \cdot dt$$

dove s è la misura della lunghezza di un arco di una generica linea ed m è la *massa maupertuisiana*, considerata come funzione di s (1). Questa grandezza, che chiameremo « *vehomassa* » (*maupertuisiana*), ha particolare interesse, perchè, come è subito visto, essa è invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Notevole è il caso che la linea s sia chiusa; potremo parlare, così, di una *vehomassa periodica*

$$(3) \quad \overline{\mu_s} = \int_0^T m(s) ds = \int_0^T m[s(t)] \cdot \frac{ds}{dt} dt \quad (T = \text{periodo})$$

Consideriamo ora la *lunghezza d'onda di De-Broglie associata ad un corpuscolo « in riposo »*:

$$(4) \quad \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c}.$$

(1) Che è funzione, a sua volta, di t .

Moltiplicando membro a membro per m_0 , otteniamo:

$$(5) \quad m_0 \cdot \lambda_0 = \frac{h}{v} = \frac{h}{c}.$$

Si potrà così parlare di una *vehomassa unica* (che dovrà necessariamente riguardarsi come *periodica*) per ogni corpuscolo « in riposo ». Il suo valore (nel sistema C. G. S.) è: $2,181 \cdot 10^{-37}$ [L¹ M¹]; esso potrà riguardarsi come misura del « *quantum elementare di vehomassa* » (*maupertuisiana*).

Considerando ora la lunghezza d'onda associata di De Broglie come qualcosa di effettivo (1), particolarmente collegato al corpuscolo, scriviamo

$$m_0 \lambda = \int_0^{\lambda} m \cdot d\lambda$$

(con che m_0 viene ad essere il valore medio di m e: $\lambda = \int_0^{\lambda} d\lambda$).

Tutti i corpuscoli elementari, dunque, compresi i fotoni, possono riguardarsi come uguali, almeno per questo rispetto, cioè per la loro *vehomassa periodica*; essi ci appaiono diversi, nell'iperpiano spaziale, ma non sono che vari aspetti dell'unico atomo quadridimensionale. Atomo quadridimensionale che a noi, nell'iperpiano spaziale, può apparire come formato da un *quid*, che chiameremo « *sub-corpuscolo* » (ente astratto del mondo tridimensionale) che sembri muoversi con velocità c (o « *quasi c* ») su di un'« *orbita* » chiusa (ente astratto dell'iperpiano spaziale, « *non osservabile* » di Heisenberg) (2).

(1) S'intende « di effettivo » come può esserlo una grandezza del mondo tridimensionale.

(2) Senza voler minimamente far dei modelli, ma soltanto per spiegarci con un esempio, diremo che questo ente tridimensionale *astratto* (identificabile, ad esempio, col *neutrino* di Pauli e Fermi?) potrebbe *sembrare* muoversi (ma non si muove, perchè è una *apparenza!*) su di un'orbita chiusa (che non è una « *osservabile!* ») a *fabbricare* (apparentemente!), con l'incurvamento dell'orbita, la carica e la massa. Ne verrebbero fuori, ad esempio, l'elettrone positivo e quello negativo (ambedue a « *spin* » dispari); e dalla combinazione dei due (sempre in questa apparenza) ne verrebbe un qualcosa di simile ad una stella doppia, cioè il fotone (a « *spin* » pari), sempre associato ad un altro fotone. E sarebbe facile ritrovare, per questa via, *tutte le formule della Meccanica quantica*; ma non si farebbe che un formalismo, anzi un'astrazione addirittura.

Ciò che abbiamo detto può servire, invece, a far meglio intendere che cosa possa voler dire « *atomo quadridimensionale* ».

Prima di passare oltre vogliamo ancora notare come il concetto generale di *vehomassa* precisi quantitativamente quello di « *corpusco-oro-orbita* » introdotto nella nota sopra citata; e come, d'altronde, l'introduzione della *vehomassa*, pur facilitandone l'esposizione, non sia essenziale per lo scopo precipuo del presente lavoro.

§ 3. - Le relazioni di incertezza di Heisenberg si possono scrivere, come è noto, sotto la forma:

$$(6) \quad \Delta p_i \cdot \Delta q_i \geq \sim h$$

essendo q_i le coordinate generali lagrangiane e p_i i momenti coniugati. Consideriamo ora il caso di un corpuscolo, *riguardato come un punto*, e adoperiamo coordinate cartesiane; avremo le:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \sim h \\ \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \sim h \\ \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \sim h \end{array} \right.$$

e inoltre

$$(8) \quad \Delta t \cdot \Delta W \geq \sim h$$

Ma l'energia W legata alla materia, se m è la massa maupertuisiana (che ha lo stesso valore di quella « *trasversale* »), può scriversi:

$$(9) \quad W = m \cdot c^2.$$

Quindi la (8) diviene:

$$\Delta (ct) \cdot \Delta (mc) \geq \sim h.$$

O ancora, ponendo

$$(10) \quad x_4 = ct,$$

si ha la:

$$(11) \quad \Delta x_4 \cdot \Delta m \geq \sim \frac{h}{c};$$

cioè, a parole: « le incertezze nelle determinazioni della massa e della coordinata x_4 del mondo quadridimensionale (minkowskiano) hanno per prodotto un numero che è dell'ordine di grandezza del granulo di *vehomassa* ».

La (11), del tutto analoga alla (1), precisa che l'atomo cronotopico, *del quale non possiamo fare modelli*, ha *vehomassa* (periodica)

h/c ; due sue grandezze *complementari* (due sezioni complementari, dal nostro punto di vista) non potranno esser contemporaneamente determinate che con l'incertezza espressa dalle relazioni heisenbergiane; così come di un corpicciuolo (pensato come del mondo tridimensionale) di volume v_3 e di *forma imprecisata* possiamo precisare soltanto, ad esempio,

$$(12) \quad \Delta l \cdot \Delta \sigma \geq v_3$$

se l è una *dimensione lineare* (che chiameremo, ad es., altezza) e σ è la *sezione trasversale* corrispondente.

Ma la cosa può vedersi ancor meglio, come adesso andiamo a mostrare.

§ 4. - Sempre riguardando il corpuscolo come un punto mobile e adoperando coordinate cartesiane, scriviamo le (7) nella forma:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x_1 \cdot \Delta (m \dot{x}_1) \geq \sim h \\ \Delta x_2 \cdot \Delta (m \dot{x}_2) \geq \sim h \\ \Delta x_3 \cdot \Delta (m \dot{x}_3) \geq \sim h \end{array} \right.$$

E considerando ancora le lunghezze d'onda associate di De Broglie come effettive:

$$\lambda_i = \frac{h}{m \dot{x}_i} \quad ; \quad \frac{1}{\lambda_i} = \frac{m \dot{x}_i}{h} \quad ; \quad \Delta \left(\frac{1}{\lambda_i} \right) = \frac{1}{h} \Delta (m \dot{x}_i)$$

scriviamo:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x_1 \cdot \Delta \left(\frac{1}{\lambda_1} \right) \geq \sim 1 \\ \Delta x_2 \cdot \Delta \left(\frac{1}{\lambda_2} \right) \geq \sim 1 \\ \Delta x_3 \cdot \Delta \left(\frac{1}{\lambda_3} \right) \geq \sim 1 \end{array} \right.$$

E ponendo:

$$(15) \quad \lambda_4 = \frac{h}{m c} = \frac{h}{m \cdot \dot{x}_4}$$

si ha, per la (11),

$$\Delta x_4 \Delta (m \cdot c) = \Delta x_4 \cdot \Delta \left(\frac{h}{\lambda_4} \right) \geq h ;$$

ossia:

$$(16) \quad \Delta x_4 \cdot \Delta \left(\frac{1}{\lambda_4} \right) \geq \sim 1 .$$

Abbiamo quindi, riassumendo, il quadro:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x_1 \cdot \Delta \left(\frac{1}{\lambda_1} \right) \geq \sim 1 \\ \Delta x_2 \cdot \Delta \left(\frac{1}{\lambda_2} \right) \geq \sim 1 \\ \Delta x_3 \cdot \Delta \left(\frac{1}{\lambda_3} \right) \geq \sim 1 \\ \Delta x_4 \cdot \Delta \left(\frac{1}{\lambda_4} \right) \geq \sim 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{dove: } \lambda_1 = \frac{h}{m \cdot \dot{x}_1} = \frac{h}{m \cdot \dot{x}} \\ \text{» } \lambda_2 = \frac{h}{m \cdot \dot{x}_2} = \frac{h}{m \cdot \dot{y}} \\ \text{» } \lambda_3 = \frac{h}{m \cdot \dot{x}_3} = \frac{h}{m \cdot \dot{z}} \\ \text{» } \lambda_4 = \frac{h}{m \cdot \dot{x}_4} = \frac{h}{m \cdot \dot{c}} \end{array}$$

Le (17) possono anche scriversi:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x_1 \cdot \Delta \lambda_1 \geq \sim \lambda_1^2 \\ \Delta x_2 \cdot \Delta \lambda_2 \geq \sim \lambda_2^2 \\ \Delta x_3 \cdot \Delta \lambda_3 \geq \sim \lambda_3^2 \\ \Delta x_4 \cdot \Delta \lambda_4 \geq \sim \lambda_4^2 \end{array} \right.$$

Secondo le (17), o (17') le « dimensioni » dell'atomo cronotopico appaiono regolate dalle lunghezze d'onda associate di De Broglie, che vengono così, ancora una volta, ad acquistare un significato di più intima realtà; ed anzi appaiono, esse, le sole grandezze che possano riguardarsi in qualche modo come dimensioni di quest'atomo (1). Potremo parlare, così, di un *ipervolume* (invariante) dell'atomo cronotopico:

$$(18) \quad v_4 = \sim \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 .$$

Se, così pensando, immaginiamo di costringere l'atomo cronotopico ad una deformazione che faccia, ad esempio, diminuire la

(1) Su questo concetto v. PIERUCCI: *Osservazioni e calcoli sulle dimensioni degli atomi*. « Nuovo Cimento », pp. 690-700, 1934.

Id., *Le così dette orbite, ecc.* « N. C. », pp. 291-300, 1942.

dimensione λ_1 , è chiaro che la diminuzione $\Delta \lambda_1$ (che non si conosce) non potrà mai raggiungere il valore λ_1 ; sicchè, tenuto conto delle (17'), avremo l'« indeterminazione », o incertezza:

$$\Delta x_1 > \sim \lambda_1 .$$

Con analogo ragionamento sopra $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ possiamo dunque scrivere il quadro:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x_1 > \sim \lambda_1 \\ \Delta x_2 > \sim \lambda_2 \\ \Delta x_3 > \sim \lambda_3 \\ \Delta x_4 \sim \lambda_4 \end{array} \right.$$

E quindi anche:

$$(20) \quad \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3 \cdot \Delta x_4 > \sim \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 .$$

Ponendo

$$(21) \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = v_4$$

(dove v_4 sarà da interpretarsi come *ipervolume dell'atomo quadridimensionale*) potremo dunque esprimere sinteticamente le relazioni di Heisenberg con la formula:

$$(22) \quad \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3 \cdot \Delta x_4 > \sim v_4 ;$$

la quale non è altro, evidentemente, che la generalizzazione nel mondo quadridimensionale della formula (1), o (1'), dalla quale siamo partiti, formula esprime, appunto, l'impossibilità di determinare contemporaneamente le coordinate di un corpuscolo (del mondo tridimensionale) di volume v_3 , considerato come puntiforme.

Concludendo, mi pare che possa affermarsi che:

1.°) *Il principio di Heisenberg (senza nulla togliere alla sua interpretazione probabilistica) può considerarsi come un principio di atomicità cronotopica.*

2.°) *La lunghezza d'onda, o, meglio, le lunghezze d'onda associate di De Broglie ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$) appaiono acquistare una*

ancor più reale concretezza, giacchè il prodotto dei loro valori viene ad esprimere la misura dell'ipervolume dell'atomo cronotopico v_4 ($v_4 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4$); le proprietà (tridimensionali) dei vari corpuscoli elementari non sarebbero, così, che vari aspetti delle sezioni (nell'iperpiano spaziale) di questo atomo (varie per le sue varie, possibili deformazioni) (1).

(1) A proposito della concretezza delle onde di De Broglie, oltre alle due mie citate note, vedi:

A. PIGNEDOLI, *Su di una espressione "ondulatoria" dei principi della Termodinamica*. « Atti della Soc. dei Nat. e Mat. di Modena », 1943.

Id. *Una nuova forma dell'equazione di Van der Waals e del Teorema degli stati corrispondenti*. « Atti Soc. Nat. e Mat. di Modena », 1942.

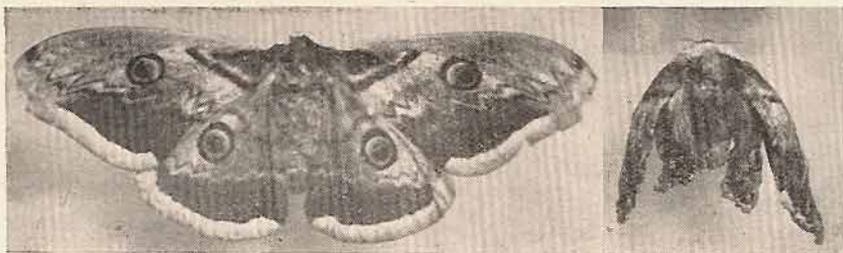
Id. *Su di un nuovo aspetto meccanico-statistico dello stato termodinamico di una massa d'aria*. « Atti Soc. Nat. e Mat. di Modena », 1943.

Modena, Istituto di Fisica della R. Università.

Anomalie alari nella *Saturnia pyri* Schiff.

Ai primi di luglio 1943 raccolti nei pressi dell'Orto Botanico della R. Università di Modena un bruco di *Saturnia pyri*, liberamente vissuto ed ormai maturo, il quale il giorno successivo la raccolta filò il bozzolo. Questo fu tenuto durante l'anno in una stanza, che venne riscaldata durante il periodo invernale.

Lo sfarfallamento avvenne il 25 maggio del 1944 e nacque una farfalla ad ali rattrappite (figura a destra), che tali si mantennero



Saturnia pyri, a sinistra: forma normale di ali distese (♀); a destra: forma ad ali rattrappite originata da larva liberamente vissuta (♀), (figure ridotte a metà della grandezza naturale). Le forme ad ali rattrappite ottenute nell'allevamento presentano un grado di contrazione e di rattrappimento delle ali ancora più profondo di quello rappresentato nella figura soprastante.

durante tutta la vita di essa. Questa visse 11 giorni (fino al 4 giugno) ed essendo tenuta in una stanza chiusa ed in gabbia di rete non venne fecondata, ma depose molte uova dalle quali non nacque alcun baco.

Il carattere delle ali rattrappite e non distese come nelle forme normali, mantenutosi durante tutta la vita della farfalla, sorto come una manifestazione spontanea, e che ricorda strettamente il carattere della mutazione ad ali rattrappite, distinta come mutazione «club», nella *Drosophyla melanogaster*, mi suggerì di compiere alcune ricerche onde esaminare il problema della sua insorgenza in questa specie.

Nella stessa primavera (26 maggio 1944) catturai nell'Orto Botanico di Modena due belle farfalle di *Saturnia pyri*, di grande statura e con le ali perfettamente distese, accoppiate al momento della cattura. Isolate in gabbia di rete la femmina depose il giorno successivo e seguenti moltissime uova.

Da queste, dopo circa 10 giorni in media dalla deposizione, nacquero numerosissimi bocolini che nutrii con foglie di *Prunus domestica* L. subsp. *oecconomica* Borkh. coltivata nell'Orto Botanico modenese, e che attraverso alla serie di mute giunsero all'età adulta. Per vero durante l'allevamento, che venne fatto in gabbie difese da rete, moltissimi morirono in varie età, per cui giunsero ad incrisalidarsi soltanto 25 individui. I primi filarono il bozzolo il 15 luglio e gli ultimi il 29 luglio (1944).

Di questi 25 individui, 23 filarono il bozzolo al completo e si rinchiusero in esso, uno non filò affatto e la crisalide rimase nuda, uno infine non costruì il bozzolo ma filò dei fili sparpagliati disposti in una superficie piana irregolare ed aperta ed anche in questo caso la crisalide rimase nuda.

Le crisalidi ed i bozzoli passarono il periodo invernale in una stanza dell'Istituto Botanico talora riscaldata, ma per lo più fredda.

Lo sfarfallamento avvenne dal 6 maggio al 1° giugno dell'anno successivo (1945), con i seguenti risultati:

1°) La crisalide derivata dal bruco che non filò il bozzolo e rimase nuda, si disseccò durante il periodo invernale e da essa non nacque la farfalla. Verosimilmente già il non avere filato sta ad indicare uno stato di diminuita vitalità della larva a cui conseguì l'impossibilità delle profonde metamorfosi nella crisalide, e quindi la morte precoce di essa.

2°) Dalla crisalide della larva che filò solo fili sparpagliati e quindi non produsse un bozzolo chiuso, nacque una farfalla (♀) ad ali profondamente rattrappite. Che però il carattere, ali rattrappite, non sia necessariamente legato alla incapacità della formazione del bozzolo completo è dimostrata dal fatto che anche da larve che filarono il bozzolo regolare nacquero, come è detto più avanti, alcune farfalle con le ali rattrappite.

3°) Dai 23 bozzoli nacquero entro questo periodo 17 farfalle (1).

(1) Altri 6 bozzoli non schiusero anche dopo 6 mesi dal periodo normale di sfarfallamento e da essi non nacquero finora gli insetti alati. (Nota aggiunta sulle bozze di stampa, dicembre 1945).

Delle 17 farfalle uscite dai bozzoli normali, 12 ebbero le ali normali completamente distese (8 ♂ e 4 ♀), una (♀) più piccola di statura, presentò ali distese ma leggermente grinzose ai margini, e 4 (3 ♂ e 1 ♀) presentarono le ali decisamente rattrappite ed anzi assai più fortemente di quanto lo sieno quelle della farfalla rappresentata nell'annessa figura proveniente dalla larva liberamente vissuta dell'anno precedente. In complesso su queste 17 farfalle si ebbero 11 maschi e 6 femmine. Considerando quindi anche la farfalla derivata da larva che non filò il bozzolo regolare si ebbero 18 farfalle (11 maschi e 7 femmine), di cui 12 ad ali normali, 1 ad ali quasi normali, e 5 ad ali decisamente rattrappite, quindi con oltre $\frac{1}{4}$ (27%) delle farfalle in possesso di questa anomalia alare.

Il carattere morfologico saliente delle ali rattrappite è quello di essere molto più piccole del normale e talora di essere assai più strette alla base e di essere inoltre ripiegate su se stesse verosimilmente come sono nella crisalide. Ciò è dovuto ad una incapacità di svolgimento dei processi di distensione che avvengono invece nelle farfalle normali che, appena uscite dalla crisalide e dal bozzolo, espandono le ali.

Lo stato di rattrappimento delle ali permane inalterato fino alla morte delle farfalle, per quanto talora durante il primo giorno dallo sfarfallamento, esso possa leggermente diminuire per una leggera parziale distensione di qualche settore, pur rimanendo però sempre le ali decisamente contratte.

Questa anomalia che ha il carattere di una deficienza funzionale (a cui consegue una morfologica) comparsa in così alta percentuale nel nostro allevamento, deve essere considerata di carattere puramente fenotipico, causata cioè dalle particolari condizioni di vita, tra cui quelle alimentari, a cui durante l'allevamento le larve furono costrette oppure essa ha un significato più profondo, è cioè una modificazione di carattere genetico trasmissibile, sorta spontaneamente od eventualmente ad insorgenza stimolata dalle particolari condizioni di vita offerte dall'allevamento? Allo stato attuale delle nostre ricerche questo problema non può essere risolto essendo mancata la possibilità di ottenere discendenti da coppie ad ali rattrappite e da quelle ad ali normali, non avendo potuto proseguire le ricerche.

Per quanto sia probabile che il carattere anomalo delle ali rattrappite sia semplicemente una deficienza morfo-funzionale di origine fenotipica, indotta cioè da fattori esterni inerenti alle condizioni di allevamento (e ciò potrebbe essere sostenuto pure dal-

l'alta percentuale di forme anomale comparse), pure va osservato che l'anomalia in parola trova una stretta rassomiglianza con la mutazione « club » della *Drosophyla melanogaster*, in questa specie esattamente individuata come mutazione genica trasmissibile. Ed anche in altri insetti è stata riscontrata con aspetti simili.

Per cui l'insorgenza, nella *Saturnia pyri*, di una mutazione trasmissibile avente il carattere « ali rattrappite » non viene esclusa dai nostri dati sperimentali. Ma la dimostrazione effettiva di questa base genetica potrà essere data soltanto da un ulteriore sviluppo delle ricerche sperimentali mediante incroci tra forme anomale e tra forme anomale e normali in condizioni di isolamento, le quali possano stabilire il comportamento nella discendenza di questa singolare anomalia morfologica qui rilevata nel suo aspetto esteriore.

È inoltre possibile che il carattere « ali rattrappite » possa manifestarsi sia come una mutazione genica, sia pure come una modificazione fenotipica non trasmissibile ed in questo caso essa sarebbe una *fenocopia* della mutazione.

Istituto Botanico della R. Università di Modena - 10 giugno 1945.

Rilievi sulla vegetazione dei calanchi della zona del Rio Pescaro ⁽¹⁾

Espongo in questa nota i risultati di alcuni rilievi compiuti sulla vegetazione dei calanchi del settore del Rio Pescaro, che rappresentano, come i calanchi in genere, stazioni in cui la vegetazione, per il modellamento e la natura del substrato, è sempre molto povera e discontinua ed in particolare nel periodo estivo in cui per il prolungarsi della insolazione e della siccità essa viene ulteriormente depauperata.

I calanchi rilevati sono quelli posti a sud della Pineta della Costa e quelli allineati lungo i Rifi Pescaro e Riccò, nel settore del Rio Pescaro.

Gli elenchi rispecchiano principalmente la vegetazione dei mesi di agosto e settembre epoca in cui i rilievi furono fatti, ma essi sono stati integrati pure con l'indicazione di specie rilevate in occasione di successive e recenti accessioni sul posto fatte nel periodo primaverile e nei primi mesi estivi.

Le località rilevate sono contrassegnate con i numeri all'inizio delle tavole.

1 - CALANCHI DELLA COSTA.

2 - 3 - 4 - CALANCHI DELLA COSTACCIA LUNGO IL RIO RICCÒ.

5 - 6 - 7 - 8 CALANCHI DI M. ACUTO E BRANZOLA LUNGO IL PESCARO.

	1	2	3	4	5	6	7	8
Esposizione	SO	S	SE	O	SO	O	O	O
Pendenza	70	75	75	45	60	78	70	60
Superficie esaminata in m ²	100	100	100	50	200	50	200	100
Superficie ricoperta in m ²								
II° Strato	1,20	0,30	0,20	0,70	0,30	1,30	2,50	1,30
I° »	2,00	1,30	1,50	3,20	2,60	1,10	3,50	1,20

(1) Dall'Istituto Botanico della R. Università di Modena, diretto dal prof. GIORGIO NEGODI - dicembre 1945.

	1	2	3	4	5	6	7	8
II° Strato								
Pn Juniperus communis				+				
P Populus alba × tremula		0,30	0,20	0,30		0,30	1,00	1,00
P Corylus Avellana				+				
P Quercus pubescens	1			0,30			1,30	
Pl Clematis Vitalba				+				
Pl Rubus fruticosus								
v. caesius						+		
Pn Crataegus Oxyacantha								
v. monogyna	0,20					0,50		
P Pirus amygdaliformis					0,20			
Pn Pirus malus						+		
Pn Spartium junceum					10	0,20	0,20	0,30
P Fraxinus Ornus				+				
I° Strato								
Th Setaria glauca					+			
H Phleum pratense	+				+			
H Agrostis alba								
H Arundo Phragmites							+	
G Cynodon Dactylon				+				
H Sesleria caerulea				0,70	+			
H Dactylis glomerata	0,20			0,50	+		0,10	
H Bromus erectus							+	
Th Brachypodium distachy- um		+						
H Brachypodium pinna- tum	+				0,20		0,40	
G Carex glauca					0,10			
Th Polygonum aviculare			+	+				
H Silene Cucubalus	0,20							
H Silene italica					+			
G Hypericum perforatum					+		+	
H Hypericum hirsutum				+				
Th Reseda lutea	0,30	0,20	0,30		0,10	0,20	0,40	0,50
Th Sisymbrium officinale							0,60	
Th Diplotaxis muralis					0,50			
Th Rapistrum rugosum			0,30	0,20	+		0,10	
H Poterium sanguisorba					+			
H Medicago sativa			0,10					
Th Melilotus officinalis	+			0,30				
H Melilotus alba				+	+		+	
Ch Dorycnium hirsutum	0,10				+		0,20	0,20

	1	2	3	4	5	6	7	8
H Lotus corniculatus		+						
H Astragalus monspessulanus		+		0,30				
Ch Astragalus Onobrychis	+			0,20	0,20		0,30	
H Galega officinalis	+							
Tn Danucus Carota							+	
Th Euphorbia platyphylla v. stricta		0,30						
G Euphorbia Cyparissias					+			
Th Echium vulgare	+							
G Convolvulus arvensis		0,10			0,20	0,20	0,20	0,10
Ch Teucrium Chamaedrys							+	
Ch Teucrium montanum	0,10	0,10	0,20	0,30	0,20	0,10	0,20	
H Stachys recta					+		+	
Ch Thymus Serpyllum					+			
H Globularia vulgaris					+			
H Galium purpureum	0,75	0,20	0,30		0,10			
H Galium lucidum				0,10	0,20			
H Knautia arvensis		+						
H Senecio erucifolius		+						
H Chrysanthemum Leucanthemum								
H Artemisia alba	0,30	0,30	0,30	0,40	0,30	0,40	0,50	0,30
H Inula viscosa	+							
G Centaurea amara				+				
H Centaurea Scabiosa	+							
G Pieris hieracioides	+					0,10	0,20	0,10

SPECIE RACCOLTE FUORI RILIEVO.

Th Bromus hordeaceus L.	Th Echium vulgare L.
Th Polygonum Bellardi (All.)	H Linaria vulgaris Mill.
Pn Canphorosma monspeliacum L.	Th Sherardia arvensis L.
Th Brassica arvensis Scheele	Th Cephalaria transilvanica Schrad.
Th Papaver Rhœas L.	H Campanula Medium L.
Ch Ononis spinosa L.	Th Helminthia echioides Gaertn.
H Medicago falcata L.	Th Lactuca saligna L.
H Onosma stellulatum W. et K.	H Hieracium umbellatum L.

SPETTRO BIOLOGICO DELLA VEGETAZIONE DEI CALANCHI.

Forme biologiche	Numero delle specie	% di frequenza
P	5	6,5
Pn	5	6,5
Pl	2	2,6
Ch	6	7,6
G	7	9,2
H	31	40,7
Th	20	26,3

Le Mega- e Meso-fanerofite non oltrepassano i due metri di altezza, ma non sono state ascritte fra le Nano-fanerofite, avendo considerato lo scarso accrescimento come un fatto transitorio legato ai fattori ambientali. I pochi esemplari di Fanerofite che si trovano sui calanchi, sono contorti nodosi, con notevole sviluppo dell'apparato radicale, già invecchiati prima di poter raggiungere il loro normale sviluppo in altezza. Spesso si trovano individui con foglie piccolissime (*Crataegus*) o già tutte cadute all'inizio di settembre per eccessiva siccità.

Le Emicrittofitte conservano una percentuale discretamente elevata, fra queste primeggiano per frequenza *Artemisia alba*, *Galium purpureum*, *Dactylis glomerata* e fra le Terofite si possono segnalare per frequenza *Reseda lutea* e *Rapistrum rugosum*.

In complesso la vegetazione del calanco è spiccatamente xerofila, ma le specie che vivono sul calanco oltre a possedere una forte resistenza alla siccità, sono provviste anche di particolari adattamenti atti a superare il continuo scalzamento a cui vanno soggette in un terreno instabile per sua natura e per la forte pendenza e specialmente di un apparato radicale, nelle specie perenni, per lo più molto sviluppato ed a molteplici contatti con il suolo.

Data la scarsa estensione calanchiva esplorata ed il piccolo numero di specie raccolte, lo spettro biologico della vegetazione dei calanchi, sopra esposto, ha valore di orientamento.

MARIO BERTOLANI

PROF. TITO BENTIVOGLIO

(Modena, 20 marzo 1868 — Formigine, 16 aprile 1945)

Vidi per l'ultima volta il Conte Prof. Tito Bentivoglio, pochi giorni prima della sciagura, sulla via maestra del piccolo Centro nel quale aveva cercato rifugio in mezzo allo scatenarsi delle forze distruggitrici della guerra, che si avvicinava.

Il fatale destino, invece, anche là lo raggiunse improvviso, spietato, inesplicabile, in quel tragico pomeriggio del 16 aprile 1945.

La triste notizia si sparse rapida e tutti coloro che ebbero la fortuna di conoscerlo e soprattutto di averlo maestro ne furono profondamente, sinceramente addolorati.

Perchè era buono, paziente, saggio, disinteressatamente devoto alla scienza, che ha avuto in lui un cultore e sopra tutto un appassionato illustratore.

Naturalista nel più ampio e vero significato della parola, rese piane e attraenti a parecchie generazioni di scolari e studenti le varie discipline scientifiche.

Numerosi i giovani che, attratti dalla sua parola semplice e nello stesso tempo profonda e appassionata, si accinsero con entusiasmo allo studio delle scienze mediche e naturalistiche ed espressero poi, raggiunta la meta, grande riconoscenza e riverente gratitudine al loro primo maestro.

Il Bentivoglio ebbe largo campo di approfondire la sua facile e naturale comunicativa; infatti, laureatosi con pieni voti assoluti in scienze naturali il 27 giugno 1892 a Modena all'età di 24 anni, iniziò subito la sua carriera scolastica con una supplenza nella Scuola Tecnica di Castel S. Giovanni (Piacenza), il 1.° ottobre 1892; carriera che doveva cessare solo a causa della sua tragica morte. Fu insegnante nella R. Scuola tecnica di Mortara, nel Liceo « Spallanzani » di Reggio Emilia, nelle Scuole Normali di Modena e Lucca, nell'Istituto Tecnico pure di Lucca, nell'Istituto Tecnico e nel Liceo S. Carlo di Modena, dove fu titolare dal 1913 al 1923 e Preside dal 1919. Passò quindi al Liceo Muratori di Modena, dove, in funzione

di Vicepreside, fu raggiunto dai limiti di età nel 1932. Ma questa data non segnò la fine della sua laboriosa carriera; la sua grande passione all'insegnamento lo portò ancora preside e insegnante al Liceo S. Carlo di Modena, poi Preside al Liceo di Cento. L'anno 1944 lo vide ancora al Muratori, supplente di Scienze Naturali.

La R. Università di Modena lo ebbe assistente volontario all'Istituto di Chimica generale dal 16 - 1 - 1893 al 16 aprile 1895. Nell'anno accademico 1929 - 30 fu incaricato dell'insegnamento della Paleontologia, che si effettuava ogni due anni. Nel 1931 - 32 l'Uni-



TITO BENTIVOGLIO

1868 - 1945

versità lo riconfermò, il Ministero invece non ratificò la nomina, perchè essendo il Professor Bentivoglio completamente al di fuori di ogni corrente politica, non era in possesso della tessera del partito fascista.

Inoltre dal 1924 al 1935 fu incaricato dell'insegnamento della chimica generale ed applicata nella R. Accademia di Fanteria e Cavalleria di Modena.

La sua attività didattica non si limitò alla scuola, sempre con assoluto disinteresse finanziario, effettuò parecchie conferenze e numerosi corsi gratuiti, tutti di argomento scientifico, per ogni categoria di persone. Fece inoltre parte di numerose commissioni giudicatrici.

La guerra 1915-18 lo vide ufficiale di artiglieria in zona di operazioni.

Cavaliere ufficiale della corona d'Italia, fu membro corrispondente della R. Deputazione di Storia Patria per le provincie modenesi, socio e bibliotecario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, socio effettivo della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Lucca e membro della R. Commissione Araldica Modenese. Era inoltre socio della Società Toscana di Scienze Naturali, della Società Geologica Italiana, della Società Italiana per il progresso delle Scienze, della Società Zoologica Italiana di Roma, dell'Unione zoologica Italiana di Napoli e, dal 1886, della Società dei Naturalisti e Matematici di Modena, nella quale, durante la seduta del 9 novembre 1914, su proposta del presidente prof. Giorgio Negodi, venne eletto vicepresidente per acclamazione. Carica che egli già in precedenza aveva ricoperto.

La sua produzione scientifica, per la varietà e per gli argomenti trattati, rispecchia fedelmente la sua anima di appassionato naturalista ricercatore. Più di settanta pubblicazioni, di carattere oltremodo vario, mettono in luce le alte qualità dello scienziato, che mai s'irrigidì in ricerche astratte o unilaterali, ma sempre cercò d'infondere in esse il suo grande amore per la natura.

Nel campo della mineralogia e petrografia, oltre a interessanti note monografiche di carattere speciale, curò la visione sintetica di quanto la nostra provincia e quella finitima di Reggio Emilia poteva offrire allo scienziato ricercatore, al collezionista appassionato, al profano. Questa impronta regionale appare anche in molte sue opere riguardanti altri campi scientifici, di modo che il Benvivoglio va annoverato tra i migliori illustratori delle nostre zone.

Non trascurò i fenomeni geologici, e numerose sue pubblicazioni parlano di sorgenti minerali e di fenomeni postglaciali.

La paleontologia è rappresentata da dieci note, sia monografiche che bibliografiche.

Appartengono al periodo nel quale fu assistente all'Istituto di chimica della R. Università di Modena tre pubblicazioni di carattere prettamente chimico, ma trattanti argomenti diversi, tutte in collaborazione con l'allora direttore prof. Magnanini.

La produzione zoologica è caratterizzata, oltre che da scritti di argomento vario, da completi studi sistematici sui libellulidi, che, iniziatisi nel 1892 con gli Odonati del modenese, furono estesi a tutte le regioni d'Italia e ad alcune di oltremare.

Altre note egli compilò di carattere biografico, didattico, illustrativo.

Uno sguardo al lungo elenco delle sue pubblicazioni, benchè non possa ritenersi sufficiente per comprendere il reale valore di esse, ci mostra l'animo profondamente osservatore e religiosamente convinto del Maestro, il quale fu anche appassionato raccoglitore e collezionista. Tanti studiosi serbano a lui profonda gratitudine per materiale vario e interessante da esso raccolto e disinteressatamente affidato in esame.

A noi discepoli sembra ancora vederlo, imponente nella persona, il volto buono e nello stesso tempo sereno ed austero, incornciato dalla caratteristica barba, e in quel volto il lampo intelligente dell'occhio indagatore, sempre pronto a fissarsi esperto su quanto natura gli offriva di interessante e di nuovo. Ora egli è scomparso quando tanto, malgrado l'età, poteva ancora dare alle nuove generazioni, che, dopo un periodo tormentato e confuso, si accingono nuovamente alla seria vita dello studio e della scienza. A questi giovani però il suo ricordo resti di esempio costante per il raggiungimento di quelle mete alle quali egli per modestia non aspirò, ma alle quali con tanta perizia indirizzò chi ebbe la fortuna di ascoltare la sua illuminata e saggia parola.

Elenco delle pubblicazioni del Prof. Tito Bentivoglio

- 1) *Analisi di un saggio di fondo del Mar Rosso*. « Atti della Soc. dei Nat. di Modena », Serie III, vol. XI, Modena, 1892.
- 2) *Contributo allo studio dei Pseudoneurotteri del Modenese*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie III, vol. XI, Modena, 1892.
- 3) *Ricerche sulla Dolomite*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie III, vol. XI, Modena, 1892.
- 4) *Analisi dei sedimenti marini di due grandi profondità del Mediterraneo*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie III, vol. XI, Modena, 1892.
- 5) *Analisi dei sedimenti marini di alcune profondità del M. Rosso*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie III, vol. XI, Modena, 1892.
- 6) *Intorno allo spettro di assorbimento delle soluzioni di alcuni cromossalati della serie bleu*. « Rendiconti R. Acc. dei Lincei », vol. II, serie V, Roma, 1893 (in collaborazione col prof. G. Magnanini).
- 7) *Conducibilità elettrica delle soluzioni dei sali di acidi organici in presenza di acido borico*. « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. II, serie V, Roma, 1893.
- 8) *Azione dell'anidride acetica sopra l'acido succinico in presenza di cloruro di zinco*. « Rend. R. Acc. d. Lincei », vol. II, serie V, Roma, 1893 (in collaborazione al prof. G. Magnanini).

- 9) *Libellulidi dei dintorni di Tortona*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie III, vol. XIII, Modena, 1894.
- 10) *Note sui pseudoneurotteri*, « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie III, vol. XIII, Modena, 1894.
- 11) *Sopra un antico cemento artificiale di Canossa*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie III, vol. XIII, Modena, 1894.
- 12) *Mineralogia e Litologia*, in « L'Appennino Modenese ». Rocca S. Casciano, L. Cappelli Ed., 1895.
- 13) *Libellulidi dei dintorni di Mortara*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie III, vol. XIII, Modena, 1895.
- 14) *Di un caso di albinismo nella Periplaneta orientalis*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie III, vol. XIV, Modena, 1895.
- 15) *Di un Petromyzon marinus catturato a S. Angelo Lomellina*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie III, vol. XIV, Modena, 1895.
- 16) *Libellulidi dei dintorni di Rimini*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena ». Serie III, vol. XIV, Modena, 1897.
- 17) *Osservazioni intorno alla varietà della specie "Platycnemis pennipes"*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Ser. III, vol. XV, Modena, 1897.
- 18) *Libellulidi del Modenese*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie IV, vol. I, Modena, 1899.
- 19) *Schedario delle opere manoscritte di Lazzaro Spallanzani esistenti nella biblioteca municipale di Reggio Emilia*, in « Nel primo centenario della morte di Lazzaro Spallanzani, omaggio di accademie e scienziati italiani e stranieri », Reggio Emilia, 1899 (in collaborazione ai proff. G. Vassale e G. Ferrari).
- 20) *Il museo Spallanzani di Storia Naturale*. Reggio Emilia, 1899.
- 21) *Ulteriori osservazioni intorno alla varietà della specie Platycnemis pennipes*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie IV, vol. II, Modena, 1900.
- 22) *Libellulidi di Massa Carrara*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie IV, vol. II, Modena, 1900.
- 23) *Bibliografia geo-mineralogica e paleontologica delle provincie di Modena e Reggio Emilia 1469-1900*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie IV, vol. III, Modena, 1901.
- 24) *Le Sorgenti di Saldino*. Reggio Emilia, 1902.
- 25) *Sul valore sistematico delle varietà della specie Platycnemis pennipes Pall.* « Rendiconti del convegno dell'Unione Zoologica Italiana », Roma, 1902.
- 26) *La Galaxaura adriatica Zanard. a Taranto e la sua area di distribuzione nel Mediterraneo*. « Nuova Notarisia », diretta da G. B. De Toni, Serie XIV, luglio 1903, Venezia, 1903.
- 27) *Le sorgenti di Quara*. Reggio Emilia, 1904.
- 28) *Visita alle sorgenti minerali di Quara*. Reggio Emilia, 1904.
- 29) *Libellulidi di Gazoldo degli Ippoliti e Canicossi (Mantova)*. « Atti Soc. d. Natur. di Modena », Serie IV, vol. II, Modena, 1905.
- 30) *Libellulidi di Reggio Emilia*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie IV, vol. VII, Modena, 1905.
- 31) *Libellulidi dell'Italia Meridionale esistenti nel Museo Zoologico della R. Università di Napoli*. « Annuario del Museo Zoologico della R. Università di Napoli » (Nuova serie), vol. I, Napoli, 1905.

- 32) *Libellulidi della Sardegna esistenti nel Museo Zoologico della R Università di Napoli*. « Annuario del Museo Zoologico della R. Università di Napoli » (Nuova serie), vol. I, Napoli, 1905.
- 33) *Libellulidi della provincia di Lucca*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie IV, vol. VIII, Modena, 1906.
- 34) *Lazzaro Spallanzani a Lazzaro Assalini (lettera)*. « Memorie R. Dep. di Storia Patria per le Prov. Modenesi », Modena, 1906.
- 35) *Distribuzione geografica dei Libellulidi in Italia*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie IV, vol. IX, Modena, 1907.
- 36) *Bibliografia e sinonimia dei Libellulidi italiani*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie IV, vol. IX, Modena, 1908.
- 37) *Impronta di Asteroide nel terziario di Castelvetro (Modena)*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie IV, vol. X, Modena, 1908.
- 38) *Bibliografia geo-mineralogica e paleontologica del modenese e reggiano (1901-1905)*. « Atti Soc. d. Nat. di Modena », Serie IV, vol. II, Modena, 1909.
- 39) *Lettere di Lazzaro Spallanzani a Quirici e Cosimo Medici*. « Atti e Memorie della R. Deput. di Storia Patria per le Prov. Modenesi », Serie V, vol. VI, Modena, 1909.
- 40) *Lettere di Lazzaro Spallanzani al Fratello riguardanti il viaggio a Costantinopoli*. « Atti e Mem. R. Deput. di Storia Patria per le Prov. Moden. », Serie V, vol. VI, Modena, 1910.
- 41) *Idee di Lazzaro Spallanzani riguardanti l'abitabilità dei pianeti*. « Atti e Mem. d. St. Patria per le Prov. Modenesi », Serie V, vol. VI, Modena, 1910.
- 42) *Cattura della Lindenia tetraphylla in Lucca*. « Atti d. Soc. Tosc. di Sc. Nat. (proc. verb.) », vol. XIX, Pisa, 1910.
- 43) *La Lindenia tetraphylla in Italia*. « Rend. della nona assemb. gen. ord. d. Un. Zool. Ital. in Napoli », sett. 1910, in « *Monitore Zoologico* », a. XXI, Firenze, 1911.
- 44) *Bibliografia geo-mineralogica e paleontologica del Modenese e Reggiano (1906-1910)*. « Atti della Soc. dei Nat. e Matem. di Modena », Serie IV, vol. XIV, anno XLV, Modena, 1912.
- 45) *Nuove osservazioni intorno alla Lindenia tetraphylla*. « Atti d. Soc. Tosc. d. Sc. Nat. ». (Proc. verb.), vol. XXII, Pisa, 1913.
- 46) *Dante Pantanelli. Cenni bio-bibliografici*. « Atti d. Soc. d. Nat. e Mat. di Modena », Serie IV, vol. XV, a. XLVI, Modena, 1913.
- 47) *Libellulidi di Crespi d'Adda e Trezzo*. « Atti d. Soc. d. Nat. e Matem. di Modena », Serie V, vol. II, Modena, 1915.
- 48) *Libellulidi del Lago di Mantova*. « Atti d. Soc. d. Nat. e Mat. di Modena ». Serie V, vol. III, Modena, 1916.
- 49) *Incisivi anomali in uno Scoiattolo*. « Atti d. Soc. d. Nat. e Mat. di Modena », Serie V, vol. III, Modena, 1916.
- 50) *Bibliografia geo-mineralogica e paleontologica del Modenese e Reggiano (1911-1915)*. « Atti d. Soc. d. Nat. e Mat. di Modena ». Serie V, vol. XLV, Modena, 1918.
- 51) *Sull'uso dell'aconito per intossicare l'acqua dei pozzi*. « Atti R. Dep. di Storia Patria per le prov. Moden. », Serie V, vol. XII, Modena, 1919.

- 52) *Nuove osservazioni sui libellulidi della Sardegna.* « Atti d. Soc. dei Nat. e Mat. di Modena », Serie V, vol. V, Modena, 1920.
- 53) *Libellulidi dei dintorni di Sarzana.* « Atti Soc. dei Natur. e Mat. di Modena », Serie V, vol. V, Modena, 1920.
- 54) *Nuove osservazioni sui Libellulidi dell'Italia Meridionale.* « Atti d. Soc. d. Natur. e Mat. di Modena », Serie V, vol. V, Modena, 1920.
- 55) *Libellulidi di alcune località italiane.* « Atti Soc. d. Nat. e Mat. di Modena », Serie V, vol. V, Modena, 1920.
- 56) *La biblioteca degli studenti del R. Liceo Muratori in Modena.* Tipolitografia Del Re, Modena, 1922.
- 57) *Libellulidi della Romagna.* « Atti Soc. dei Nat. e Mat. di Modena », Serie VI, vol. III, Modena, 1924.
- 58) *Giovanni Battista De Toni* — Commemorazione letta all'Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, in « Atti accademici », 1925.
- 59) *Libellulidi di Ferrara.* « Atti Soc. d. Nat. e Mat. di Modena », serie VI, vol. III, 1926.
- 60) *Libellulidi di alcune località italiane (nota seconda).* « Atti Soc. dei Nat. e Mat. di Modena », Serie VI, vol. II, 1926.
- 61) *Le marmitte dei Giganti nei dintorni di Fiumalbo e la loro leggenda,* in « Scoltenna », Pievepelago, 1926.
- 62) *Libellulidi dei dintorni di Roma.* « Atti Soc. dei Nat. e Mat. di Modena », Serie VI, vol. III, 1929.
- 63) *Cenni bio-bibliografici sul dott. Francesco Coppi.* « Atti Soc. dei Nat. e Mat. di Modena », Serie VI, vol. IV, 1927.
- 64) *Francesco Coppi.* — Parole commemorative pronunciate all'Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, nell'adunanza 29 marzo 1927.
- 65) *Anomalie di echinoderma fossile di Montese.* in « Rendiconti della Accademia delle Scienze di Modena », 1922.
- 66) *Fossili terziari di Castelvetro,* in « Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Modena », 1924.
- 67) *Impronta di foglia di pioppo trovata nell'argilla pliocenica di Castelvetro,* in « Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Modena ».
- 68) *Sinossi di chimica generate ed applicata ad uso dei sottufficiali allievi dell'a R. Acc. Militare di Modena.* (Anno scol. 1925, 26, 27, 28, 29). Società Tipografica Modenese, 1926, 27, 28, 29
- 69) *Catalogo della Biblioteca degli studenti del R. Liceo Muratori di Modena.* Tipografia Ferraguti, 1927.
- 70) *Ricerche faunistiche nelle isole dell'Egeo. Odonati.* « Archivio Zoologico italiano », vol. XIII, fasc. 1-2, Napoli, 1929.
- 71) *Bibliografia geo-mineralogica e paleontologica del Modenese e Reggiano (1915-1930).* « Atti Soc. dei Nat. e Mat. di Modena », Serie VI, vol. VIII, Modena, 1929.
- 72) *Impronta problematica in roccia del Modenese.* « Atti Soc. dei Nat. e Mat. di Modena », vol. LXII, Modena, 1931.
- 73) *Fauna delle colonie italiane. I vertebrati.* (Sunto delle lezioni). « Ist. di coltura coloniale di Modena », Tip. Ferraguti, 1934.

DOTT. FERNANDO MALAVOLTI

LUIGI DE BUOI

Il Marchese Luigi De Buoi nacque a Dinazzano (Reggio Emilia) il 16 sett. 1899. Laureatosi, nel 1924, in medicina con pieni voti assoluti e lode presso l'Università di Modena, fu per alcuni anni assistente all'Ospedale di Scandiano, indi medico condotto ad Arceto, dove morì il 16 maggio 1945.



1899-1945

L'attività scientifica del De Buoi fu molteplice. Iniziata nel 1925 con pubblicazioni di carattere medico (I-IX, XI, XIV, XVII), ben presto fu tutta rivolta all'investigazione naturalistica del natio Scandianese e del vicino Modenese. Egli non era, come si suol dire, uno specialista ma un innamorato della natura e della sua terra. Al duplice scopo di rendere a tutti comprensibile la prima e di attirare l'interessamento degli studiosi sulla seconda appare improntata tutta la sua opera.

La geologia dello Scandianese (X), le impronte problematiche che si rinvennero sulle rocce inglobate dalle argille scagliose (XV), le salse (XIII, XVIII); la malacologia del territorio di Scandiano (XXII) diedero materia a successive pubblicazioni.

Anche alle conoscenze paleontologiche il De Buoi portò un notevole contributo con le ricerche nelle stazioni eneolitiche di Pe-

scale (Modena) (XVII) e di Chiozza (XII, XIX-XXI). Presso quest'ultima egli ebbe la meritata ventura di scoprire la cosiddetta « *Venere di Chiozza* », la seconda scultura emiliana di tipo paleolitico superiore.

Sebbene nessuno scritto abbia lasciato in materia, non tralasciò di interessarsi ai fortuiti rinvenimenti di carattere archeologico avvenuti in occasione di lavori agricoli.

Negli ultimi anni il D. B. aveva rivolto la sua attenzione anche alla letteratura. Frutto di questo suo nuovo orientamento è il romanzo « *10.000 anni fa* » al quale la fantasiosa elaborazione delle conoscenze archeologiche, lo spirito naturalistico e l'esperienza professionale ognora affioranti, l'indagine psicologica di un'umanità primitiva e la garbata canzonatura alla scienza ufficiale conferiscono singolare interesse.

Nè queste sole erano le attività alle quali, nelle pause del suo indefesso lavoro professionale, dava opera assidua ed appassionata. Tra le sue carte sono stati trovati, oltre al manoscritto di un secondo romanzo, appunti per una monografia di notevole mole sulle impronte problematiche delle argille scagliose, per una bibliografia paleontologica delle provincie di Modena e Reggio, per una biografia dei naturalisti modenesi e reggiani.

Quanti ricordano il sorriso buono, la mente vivace e il carattere leale di Luigi De Buoi, sanno che con lui scompare l'ultimo dei medici naturalisti, degno figlio della patria di Lazzaro Spalanzani.

Publicazioni del Dott. Luigi De Buoi.

- I. *Contributo sperimentale allo studio della vitamina C (Tesi di Laurea)*. Modena 1925, di pp. 39 in 8° e tavv. 2.
- II. *L'uso delle tubercoline nella diagnosi e nella terapia*. Scandiano 1927, di pp. 17 in 8°.
- III. *La vaccinazione antiptiogenica preventiva e curativa mediante il vacino antiptiogeno Bruschetti*. « *Rinnovamento medico* », Napoli 1927, n. 12, pp. 251-256 ed estr.
- IV. *L'uso del Lactoryn Alfa nei processi infettivi dell'intestino*. Milano 1928.
- V. *Cinque casi di tetano guariti con iniezioni di siero a dosi elevate*. « *Terapia* », XVIII-1928, n. 109, pp. 220-223.
- VI. *Calcolo vescicale originatosi da un frammento di carla da giornale*. « *La Pediatria pratica* », V, fasc. XI, 1928. Estr. di pp. 8.

- VII. *Ospedale " Cesare Magati " di Scandiano Emilia. Rendiconto statistico degli infermi curati nel reparto Medicina negli anni 1926 - 27 - 28.* Scandiano 1929.
- VIII. *Di un caso di ernia crurale voluminosa strozzata in un uomo.* « Rassegna di Clinica, Terapia e Scienze affini », XXVIII, fasc. II, 1929.
- IX. *Rendic. statistico dell' Osp. " Cesare Magati " di Scandiano E. Reparto di Chirurgia generale e della sezione di Ostetricia e Ginecologia.* Scandiano 1929.
- X. *Note geologiche del territorio scandinese.* Reggio E., 1930, di pp. 46 in 8°, con 21 figg. e una carta geologica.
- XI. *Rendic. statistico dell' Ospedale " Cesare Magati ". Reparto Radiologia e cure fisiche.* Scandiano 1931.
- XII. *Tracce dell' uomo neolitico a Chiozza di Scandiano.* « Atti Soc. Nat. e Matem. di Modena », LXII, 1931. Estr. di pp. 5 e 1 tav.
- XIII. *Eruzione della Salsa di Regnano (Reggio Emilia) del 19 ottobre 1930.* « Atti Soc. Nat. Matem. di Modena », LXII, 1931, con 2 tav.
- XIV. *Su di un caso di carcinoma primitivo della parete anteriore della vagina.* Modena 1932. Di pp. 7 in 8°, con 1 fig.
- XV. *Su di alcune impronte fossili problematiche.* « Atti Soc. Nat. Matem. Modena », LXIII, 1932. Estr. di pp. 7 e tav. 1.
- XVI. *L' Ossalemia artritica.* « Notiziario di diagnostica e terapia », 1933, n. 5 - 6.
- XVII. *Su materiale neolitico del Pescale.* « Atti Soc. Nat. Matem. di Modena », LXVI, 1935, pp. 99 - 103, con 1 tav.
- XVIII. *Su di alcuni fenomeni eruttivi osservati nelle Salse di Nirano Modenese e considerazioni e ipotesi sul meccanismo eruttivo delle salse emiliane.* Reggio, 1937, di pp. 14 e tavv. 4.
- XIX. *Scoperte e scavi preistorici nello Scandinese. Nuovi ritrovamenti nel sepolcreto neolitico di Chiozza di Scandiano (Reggio E.).* « Atti Soc. Natur. Matem. Modena », LXXI, 1940, pp. 194 - 200, tavv. I - V.
- XX. *Notizie di paletnologia. Un sepolcreto neolitico a Chiozza di Scandiano.* « Il Solco Fascista », quotid. di Reggio E., n. 162, 1 - 12-1940.
- XXI. *La più antica statua del Reggiano. Un rinvenimento paletnologico della massima importanza.* « Il Solco Fascista », n. 297, dic. 1940.
- XXII. *Catalogo dei molluschi viventi nel territorio di Scandiano (Reggio E.).* « Atti Soc. Nat. Matem. Modena », LXXII, pp. 89-96, 1941.

Inoltre numerosi articoli di carattere divulgativo e il romanzo *10.000 anni fa*, Tip. Goretti, Reggio E., 1943.

1870

1871

1872

1873

1874

1875

1876

1877

1878

1879

1880

1881

1882

1883

1884

1885

INDICE DEL VOLUME LXXVI

Presidenza per il biennio 1945-1946	Pag. III
Elenco Soci ordinari	» V
Processi verbali delle Adunanze	» VII
GIORGIO NEGODI — Il componente mediterraneo nella flora modenese e reggiana	» 1
MARIO BERTOLANI — Contributo alla conoscenza della formazione ofiolitica appenninica — Graniti erratici dell' Appennino Modenese	» 23
A. BALLI e C. MOSCARDINI — I lepidotteri del modenese — Primo contributo alla loro conoscenza sistematico-biologica	» 40
MARIANO PIERUCCI — Donde provengono le comete?	» 60
CATALDO AGOSTINELLI — Sull'area delle orbite cometarie	» 64
FERNANDO MALAVOLTI — Resti di castoro nelle stazioni eneolitiche ed enee del Modenese	» 68
ID. — Sul preteso rinvenimento di <i>Megaceros euryceros</i> Aldrovandi ad Arceto di Scandiano (Reggio Emilia)	» 72
MARIO BERTOLANI — Il quarzo della valle dell' Aveto	» 79
MARIANO PIERUCCI — L'eclisse parziale di sole del 9 luglio 1945 ed una esperienza di ionizzazione atmosferica	» 84
M. PIERUCCI e P. CREMASCHI — Inibizione spettroscopica anomala	» 86
ANTONIO PIGNEDOLI — Estensione di un teorema di Joukowski al caso di un sistema olofono, a vincoli indipendenti e con n gradi di libertà	» 94
DIEGO PASQUINI — Florula di Montegibbio e Pescaro	» 103
ANTONIO PIGNEDOLI — Sul moto di un corpo rigido pesante intorno ad un punto fisso, prossimo al baricentro o poco differente dalla struttura giroscopica	» 115
GIOVANNA MAYR — Le dimensioni delle grandezze elettriche e magnetiche nei vari sistemi	» 144
MARIANO PIERUCCI — Il principio di Heisenberg come principio di atomicità cronotopica	» 148

GIORGIO NEGODI — Anomalie alari nella *Saturnia pyri Schiff.* . Pag. 156
DIEGO PASQUINI — Rilievi sulla vegetazione dei calanchi della
zona del Rio Pescara » 160

COMMEMORAZIONI

MARIO BERTOLANI — Prof. Tito Bentivoglio Pag. 164
FERNANDO MALAVOLTI — Dott. Luigi De Buoi » 171

ERRATA

CORRIGE

pag. v rigo 37	} prof. Francesco Musaio	} prof. Luigi Musaio
pag. ix rigo 40		
pag. 92 rigo 17	<i>atomico</i>	<i>elettronico</i>